

Inhaltsverzeichnis

I	Regelungssysteme 2	2
1	Systembeschreibung und Übertragungsverhalten	2
1.1	Darstellung und Verhalten im Zeitbereich	2
1.1.1	Zustandsraumdarstellung	2
1.1.2	Zustandstransformation	2
1.1.3	Kanonische Jordanform	2
1.1.4	Lösung der Zustandsgleichung	2
1.2	Darstellung im Laplace-Bildbereich	2
1.2.1	Übertragungsfunktionsmatrix	2
1.2.2	Rosenbrock-Systemmatrix	2
1.3	Grundlegende Strukturen	2
1.3.1	Parallelschaltung	2
1.3.2	Reihenschaltung	3
1.3.3	Kreisstruktur	3
1.4	Pole und Nullstellen	3
1.4.1	Pole	3
1.4.2	Übertragungsnullstellen (ÜNS)	3
1.4.3	Invariante Nullstellen (INS)	3
1.4.4	Entkopplungsnullstellen	3
1.4.5	Überblick	4
1.4.6	Richtungen von Polen und Nullstellen	4
1.4.7	Minimale und maximale Verstärkung mit Richtungen	4
1.4.8	Richtungsabhängigkeit der Verstärkung	4
2	Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	4
2.1	Steuerbarkeit und asymptotisches Systemverhalten	4
2.1.1	Kalman'sches Steuerbarkeitskriterium	4
2.1.2	Gilbert'sches Steuerbarkeitskriterium	5
2.1.3	Hautus' Steuerbarkeitskriterium	5
2.1.4	Stabilisierbarkeit	5
2.2	Beobachtbarkeit und asymptotisches Systemverhalten	5
2.2.1	Kalman'sches Beobachtbarkeitskriterium	5
2.2.2	Gilbert'sches Beobachtbarkeitskriterium	5
2.2.3	Hautus' Beobachtbarkeitskriterium	5
2.2.4	Entdeckbarkeit	5
3	Strukturelle Analyse linearer Systeme	5
3.1	Strukturmatrizen und Strukturgraphen	5
3.2	Strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit	5
3.2.1	Strukturelle Steuerbarkeit	6
3.2.2	Strukturelle Beobachtbarkeit	6
3.3	Schleifenfamilie	6
3.4	Strukturell feste Eigenwerte	6
4	Stabilität von MIMO-Systemen	6
4.1	Frequenzbereichsbedingungen für Rückführsysteme	6
4.1.1	Hsu-Chen-Theorem	6
4.1.2	Nyquistkriterium (MIMO-Fall)	7
4.1.3	Bedingung des spektralen Radius	7
4.1.4	Small gain Theorem	7
4.1.5	Gershgorintheorem	7
4.2	Interne Stabilität von Rückführsystemen	8
4.3	Lyapunov-Stabilität und Quadratische Stabilität	8
4.3.1	Lyapunov-Stabilität	8
4.3.2	Direkte Methode von Lyapunov	8
4.3.3	Quadratische Stabilität	8
5	Reglerentwurfverfahren	8
5.1	Wahl der Vorfiltermatrix L	9
5.2	Vollständige Modale Synthese nach Roppenecker	9
5.3	Regelung für Störentkoppelung	9
5.4	Entkopplungsregelung nach Falb-Wolovich	10
5.5	Direktes Nyquistkriterium zum Entwurf dezentraler Regler	10
5.5.1	Direktes Nyquistverfahren zum Entwurf dezentraler Regeleinrichtungen	10
5.6	Relative Gain Array (RGA)	11
6	Grundlagen Performanzorientierter Regelung von MIMO-LTI-Systemen	11
6.1	Grundlegende Definitionen	11
6.2	Spezifikationen und Loop Shaping	11
6.2.1	Qualitative Forderungen zum Closed-Loop Shaping	11
6.2.2	Quantitative Forderungen beim Closed-Loop Shaping und Gewichtete Sensitivität	12
6.3	Beschränkungen der Performanz	12
6.3.1	SISO Interpolationsbeschränkung	12
6.3.2	MIMO Interpolationsbeschränkung	12
6.3.3	Bode-Sensitivitätsintegral und Wasserbetteffekt (SISO-Fall)	12
6.3.4	Poisson-Sensitivitätsintegrale und Sensitivitätsspeaks (SISO-Fall)	12
7	H_∞-Regelung	13
7.1	PK-Struktur	13
7.1.1	Analyse der verallgemeinerten Strecke im Laplace-Bereich	13
7.1.2	Beschreibung der verallgemeinerten Strecke im Zeitbereich	13
7.1.3	Mixed sensitivity design	13
7.2	H_∞ -optimale Reglersynthese	13
8	Appendix	13
8.1	Singulärwertzerlegung	13

Teil I

Regelungssysteme 2

1 Systembeschreibung und Übertragungsverhalten

1.1 Darstellung und Verhalten im Zeitbereich

1.1.1 Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

1.1.2 Zustandstransformation

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= T^{-1}x(t) \\ \dot{\tilde{x}} &= \underbrace{T^{-1}AT}_{\tilde{A}}\tilde{x} + \underbrace{T^{-1}B}_{\tilde{B}}u \\ y &= \underbrace{CT}_{\tilde{C}}\tilde{x} + Du \end{aligned}$$

1.1.3 Kanonische Jordanform

Angenommen A habe p reelle Eigenwerte $\lambda_k, k = 1, \dots, p$ und $\frac{n-p}{2}$ konjugiert komplexe Eigenwerte $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ ($\lambda_k^* = \alpha_k - i\beta_k$), $k = p + 1, \dots, m$ mit $m = p + \frac{n-p}{2}$, dann existiert eine reguläre Zustandstransformation:

$$T = (v_1, \dots, v_p, \operatorname{Re}(v_{p+1}), \operatorname{Im}(v_{p+1}), \dots, \operatorname{Re}(v_m), \operatorname{Im}(v_m))$$

Hierbei entsprechen v_k den Haupteigenvektoren im Falle einfacher Eigenwerte und den Nebeneigenvektoren für vielfache Eigenwerte.

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} J_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_l \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ für reelle EW}$$

$$\text{bzw. } J_i = \begin{pmatrix} W_i & I_2 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & I_2 \\ 0 & \dots & 0 & W_i \end{pmatrix} \text{ für komplex conj. EW}$$

$$W_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{pmatrix}; \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nebeneigenvektoren erhält man aus der Beziehung:

$$(A - \lambda_i I)v_{i+1} = v_i$$

1.1.4 Lösung der Zustandsgleichung

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t-t_0)x_0}_{\text{Eigenbewegung}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}_{\text{Erzwungene Bewegung}; \quad t \geq t_0}$$

$$\Phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

$$y(t) = C\Phi(t)x_0 + \int_0^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Für $u(t) = \bar{u}e^{\mu t}$ gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \underbrace{Ce^{At}x_0}_{y_{\text{frei}}} + \underbrace{[C(\mu I - A)^{-1}B + D]}_{y_s} \bar{u}e^{\mu t} \\ &\quad - \underbrace{Ce^{At}(\mu I - A)^{-1}B\bar{u}}_{y_{\text{ü}}} \end{aligned}$$

1.2 Darstellung im Laplace-Bildbereich

1.2.1 Übertragungsfunktionsmatrix

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \text{ falls } X_0 = 0 \\ Y(s) &= G(s) \cdot U(s) \end{aligned}$$

Definition:

Wenn $D = 0$ gilt, das System also nicht sprunghaft ist, so haben alle Elemente $G_{ij}(s)$ einen kleineren Zählergrad als Nennergrad. $G(s)$ wird dann als **streng proper** bezeichnet.

Ist $D \neq 0$, so hat mindestens ein Element $G_{ij}(s)$ denselben Zähler- wie Nennergrad und das System ist sprunghaft bezüglich der Wirkung des j -ten Eingangs auf den i -ten Ausgang. $G(s)$ ist dann nur **proper**.

1.2.2 Rosenbrock-Systemmatrix

Mit Hilfe der Rosenbrock-Matrix wird zusätzlich ein beliebiger Anfangswert x_0 berücksichtigt:

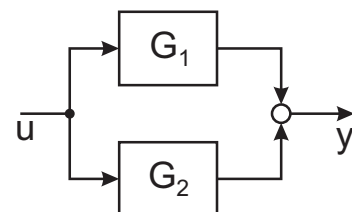
$$\underbrace{\begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}}_{=R(s)} \cdot \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y(s) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot [BU(s) + X_0]$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{[C(sI - A)^{-1}B + D]}_{G(s)} U(s) + \underbrace{C(sI - A)^{-1}X_0}_{G_0(s)}$$

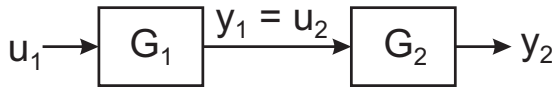
1.3 Grundlegende Strukturen

1.3.1 Parallelschaltung



$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

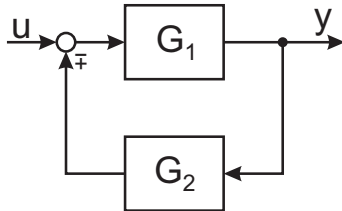
1.3.2 Reihenschaltung



$$G(s) = G_2(s)G_1(s)$$

Hier muss die Reihenfolge beachtet werden!

1.3.3 Kreisstruktur



$$G(s) = [I \pm G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s) = G_1(s)[I \pm G_2(s)G_1(s)]^{-1}$$

1.4 Pole und Nullstellen

1.4.1 Pole

Ein $p_i \in \mathbb{C}$ ist ein Pol des Systems mit Übertragungsfunktionsmatrix $G(s)$, wenn mindestens ein Element $G_{ij}(s)$ einen Pol bei p_i hat. Außerdem gilt:

Pol \Leftrightarrow steuer- und beobachtbarer EW von A

Pole haben die folgende Bedeutung für ein LTI-System:

- Die Pole bestimmen wesentlich die asymptotische Stabilität
- Sie können durch Rückkopplung beeinflusst werden
- Sie bestimmen das modale Verhalten
- Sie beeinflussen das E/A-Verhalten

1.4.2 Übertragungsnullstellen (ÜNS)

Übertragungsnullstellen eines MIMO-LTI-Systems sind Frequenzen μ , für die gilt:

$$\begin{aligned} \det(G(\mu)) &= 0 && \text{falls } r = q \\ \text{Rang}(G(\mu)) &< \max_s \text{Rang}(G(s)) && \text{falls } r \neq q \end{aligned}$$

Falls μ ein EW von A ist, dann muss gelten (falls ÜNS):

- $U \neq 0$ und endlich
- $\lim_{s \rightarrow \mu} G(s)U = 0$

Eigenschaften:

- Bei einer ÜNS verschwindet das stationäre Verhalten für eine bestimmte Frequenz
- ÜNS sind i.A. nicht identisch mit den Nullstellen der einzelnen Matrixelemente $G_{ij}(s)$
- ÜNS können dieselben Werte wie Pole aufweisen
- ÜNS \Leftrightarrow nicht kompensierte INS

- Nichtquadratische Übertragungsfunktionen haben i.A. keine ÜNS, da in diesem Fall mehrere Spalten linear abhängig sein müssen, was sehr selten ist
- Nichtsprungfähige Systeme ($D = 0$) mit derselben Anzahl an Eingangs- Zustands- und Ausgangsgrößen ($n = q = r$) haben keine ÜNS \rightarrow Falls B und C quadratisch \Rightarrow keine ÜNS
- Ein System ist **minimalphasig**, wenn gilt:

$$Re(\ddot{U}NS) < 0 \forall \ddot{U}NS$$

1.4.3 Invariante Nullstellen (INS)

Als die invarianten Nullstellen eines MIMO-LTI-Systems werden diejenigen $\eta \in \mathbb{C}$ bezeichnet, für die die Rosenbrock-Systemmatrix $R(\eta)$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \det(R(\eta)) &= \det \begin{pmatrix} \eta I - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 && r = q \\ \text{Rang}(R(\eta)) &< \max_s \text{Rang}(R(\eta)) && r \neq q \end{aligned}$$

Es werden nur nicht-degenerierte und nicht-rechtssinguläre Systeme betrachtet.

Degeneriert:

$$\text{Rang}(R(s)) < \min(n + \text{Rang}(B), n + \text{Rang}(C))$$

Rechtssingulär:

$$\text{Rang}(R(s)) < n + \text{Rang}(B)$$

Degeneriertheit \Rightarrow Rechtssingularität

Außerdem gilt (**Schurformel**):

$$\det(R(\eta)) = \det \begin{pmatrix} \eta I - A & -B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(\eta I - A) \det(G(\eta))$$

Diese Formel gilt im vollen Umfang jedoch nur für $\det(\eta I - A) \neq 0$. Es kann also nicht daraus gefolgert werden, dass jeder EW eine INS ist!

Eigenschaften:

- Beschreiben inneres Verhalten
- Anzahl INS \geq Anzahl ÜNS
- INS \Leftrightarrow ENS oder ÜNS

Eine INS ist dann eine ÜNS, wenn

- sie mit keinem EW zusammenfällt oder
- sie mit einem Pol zusammenfällt.

1.4.4 Entkopplungsnullstellen

Eine INS η heißt **Eingangsentkopplungsnullstelle**, wenn sie von einem nicht-steuerbaren EW von A kompensiert wird bzw. wenn gilt:

$$\text{Rang}(\eta I - A \quad -B) < n$$

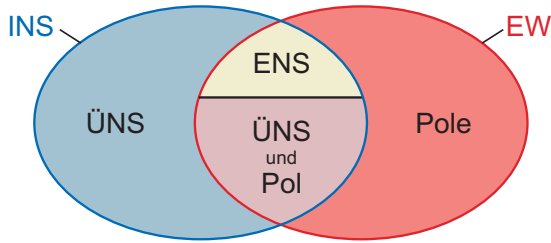
Eine INS η heißt **Ausgangsentkopplungsnullstelle**, wenn sie von einem nicht-beobachtbaren EW von A kompensiert wird bzw. wenn gilt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \eta I - A \\ C \end{pmatrix} < n$$

Entkopplungsnullstellen haben die Bedeutung, dass ein nicht-steuerbarer/nicht-beobachtbarer Eigenvorgang nicht durch den Eingang angeregt werden kann oder nicht am Ausgang gemessen werden kann. Sie sind keine Übertragungsnullstellen.

Wenn ein System vollständig steuerbar und beobachtbar ist, gibt es keine Entkopplungsnullstellen.

1.4.5 Überblick



$$\{INS\} = \{\ddot{U}NS\} \cup \{ENS\}$$

$$\{EW\} = \{Pole\} \cup \{ENS\}$$

1.4.6 Richtungen von Polen und Nullstellen

Sei $s = z$ eine Nullstelle von $G(s)$ und es gibt nichttriviale Vektoren u_z und y_z^* (konjugiert-komplexe und transponierte Version von y_z), sodass

$$G(z)u_z = 0; \quad y_z^*G(z) = 0; \quad \|u_z\|_2 = \|y_z\|_2 = 1$$

u_z : Eingangsnullstellenrichtung
 y_z : Ausgangsnullstellenrichtung

Sei außerdem $G(z) = U\Sigma V^*$ die Singulärwertzerlegung.

$\Rightarrow u_z$ ist letzte Spalte von V
 $\Rightarrow y_z$ ist letzte Spalte von U

Für einen Pol $s = z$ gilt:

$$G(p)u_p = \infty; \quad y_p^*G(p) = \infty$$

u_p : Eingangspolrichtung
 y_p : Ausgangspolrichtung

$\Rightarrow u_p$ ist erste Spalte von V
 $\Rightarrow y_p$ ist erste Spalte von U

1.4.7 Minimale und maximale Verstärkung mit Richtungen

1) Berechne die EW von $G^T G$:

$$\det(\lambda_i I - G^T G) = 0$$

2) Berechne Verstärkungen:

$$\sigma_{min} = \sqrt{\lambda_{min}}$$

$$\sigma_{max} = \sqrt{\lambda_{max}}$$

3) Berechne die dazugehörigen Richtungen \tilde{v}_i :

$$(\lambda_i I - G^T G)\tilde{v}_i = 0$$

4) Berechne die normierten Richtungen v_i :

$$v_i = \frac{1}{|\tilde{v}_i|} \cdot \tilde{v}_i$$

1.4.8 Richtungsabhängigkeit der Verstärkung

Die Verstärkung bei einem MIMO-System hängt von der Frequenz und der Richtung des Eingangs u ab und ist unabhängig von der Länge des Eingangs $\|u(\omega)\|_2$:

$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)u(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2}$$

2 Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Anforderungen zur Lösbarkeit einer Regelungsaufgabe:

- 1) Steuerbarkeit und Erreichbarkeit in endlicher Zeit ($t < \infty$)
- 2) Stabilisierbarkeit im asymptotischen Sinn ($t \rightarrow \infty$)
- 3) Rekonstruierbarkeit und Beobachtbarkeit in endlicher Zeit ($t < \infty$)
- 4) Entdeckbarkeit im asymptotischen Sinn ($t \rightarrow \infty$)

Definitionen von Eingangs-Zuständen:

- **Stabilisierbarkeit:**
 Wenn für einen beliebigen Anfangszustand $x(0) = x_0$ eine Eingangsfunktion $u(t)$ existiert, sodass das System in nicht unbedingt endlicher Zeit in den Endzustand $x(t_e) = 0$ gesteuert werden kann.
- **Steuerbarkeit:**
 Wenn für einen beliebigen Anfangszustand $x(0) = x_0$ eine Eingangsfunktion $u(t)$ existiert, sodass das System in endlicher Zeit $0 < t \leq t_e < \infty$ in den Endzustand $x(t_e) = 0$ gesteuert werden kann.
- **Erreichbarkeit:**
 Wenn für einen beliebigen Endzustand $x(t_e) = x_e$ eine Eingangsfunktion $u(t)$ existiert, in den das System in endlicher Zeit $0 < t \leq t_e < \infty$ von dem Anfangszustand $x(0) = 0$ aus überführt werden kann.

Definitionen von Ausgangs-Zuständen:

- **Entdeckbarkeit:**
 Wenn man bei gegebenem $u(t)$ aus dem zukünftigen Zeitverlauf von $y(t)$ über eine nicht unbedingt endliche Zeitspanne $t \in [0, \infty)$ den Anfangszustand $x(0) = x_0$ eindeutig ermitteln kann.
- **Beobachtbarkeit:**
 Wenn man bei gegebenem $u(t)$ aus dem (zukünftigen) Zeitverlauf von $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne $t \in [0, t_e]$ den Anfangszustand $x(0) = x_0$ eindeutig ermitteln kann.
- **Rekonstruierbarkeit:**
 Wenn man bei gegebenem $u(t)$ aus dem (vergangenen) Zeitverlauf von $y(t)$ über eine endliche Zeitspanne $t \in [0, t_e]$ den Zustand $x(t_e) = x_e$ eindeutig rekonstruieren kann.

2.1 Steuerbarkeit und asymptotisches Systemverhalten

2.1.1 Kalman'sches Steuerbarkeitskriterium

Das System (A, B) ist genau dann steuerbar, wenn gilt:

$$Rang(Q_S) = n$$

$$Q_S = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

2.1.2 Gilbert'sches Steuerbarkeitskriterium

Das MIMO LTI-System (Λ, \tilde{B}) (in kanonischer Normalform) ist genau dann steuerbar, wenn die Matrix \tilde{B} keine Nullzeile besitzt und wenn die p Zeilen \tilde{b}_i^T , die zu den kanonischen Zustandsgrößen eines p -fachen Eigenwertes gehören, linear unabhängig sind.

2.1.3 Hautus' Steuerbarkeitskriterium

Das System (A, B) ist genau dann vollständig steuerbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(\lambda_i I - A, B) = n$$

2.1.4 Stabilisierbarkeit

Das Paar (A, B) ist genau dann stabilisierbar, wenn alle λ_i mit $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ steuerbar sind:

$$\text{Rang}(\lambda_i I - A, B) = n \quad \forall \text{Re}(\lambda_i) \geq 0$$

2.2 Beobachtbarkeit und asymptotisches Systemverhalten

2.2.1 Kalman'sches Beobachtbarkeitskriterium

Das System (A, B) ist genau dann beobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(Q_B) = n$$

$$Q_B = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.2.2 Gilbert'sches Beobachtbarkeitskriterium

Das System (Λ, \tilde{C}) (in kanonischer Normalform) ist genau dann beobachtbar, falls \tilde{C} keine Nullspalte besitzt und wenn die p Spalten \tilde{c}_i von \tilde{C} , die zu einem p -fachen Eigenwert gehören, linear unabhängig sind.

2.2.3 Hautus' Beobachtbarkeitskriterium

Das System (A, C) ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall \lambda_i \in \lambda(A)$$

2.2.4 Entdeckbarkeit

Das Paar (A, C) ist genau dann entdeckbar, wenn alle λ_i mit $\text{Re}(\lambda_i) \geq 0$ beobachtbar sind:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{pmatrix} = n \quad \forall \text{Re}(\lambda_i) \geq 0$$

3 Strukturelle Analyse linearer Systeme

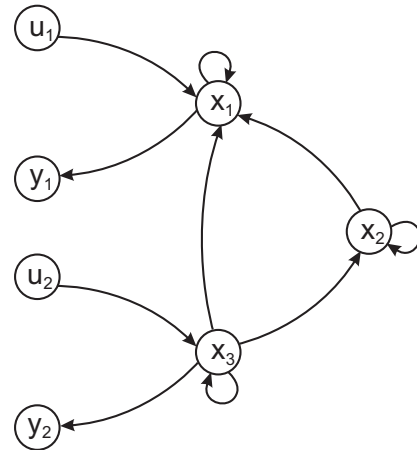
3.1 Strukturmatrizen und Strukturgraphen

Zum Aufstellen einer Strukturmatrix müssen lediglich alle Einträge einer Matrix, die ungleich Null sind, zu 1 gesetzt

werden, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow S_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Anhand der Strukturmatrizen, die die Verbindungen zwischen den einzelnen Knoten u_i, x_i, y_i repräsentieren, kann ein Strukturgraph erstellt werden, wie z.B.:



Die Kopplungsstruktur kann mittels der Adjazenzmatrix beschrieben werden:

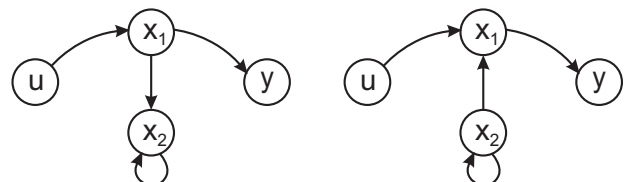
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ u \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_A & S_B & 0 \\ 0 & 0 & S_R \\ S_C & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{Ad} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \\ y \end{pmatrix}$$

Falls der Ausgang nicht auf den Eingang zurückgeführt wird, gilt $S_R = 0$.

3.2 Strukturelle Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Definitionen:

- **Eingangsverbundenheit:**
Zu jedem Zustandsknoten x_i gibt es mindestens einen Pfad, der von einem Eingangsknoten dorthin führt.
- **Ausgangsverbundenheit:**
Von jedem Zustandsknoten x_i gibt es einen Pfad, der zu mindestens einem Ausgangsknoten führt.
- **Struktureller Rang ($s - \text{Rang}$):**
Der strukturelle Rang einer Matrix entspricht der Anzahl an nicht-trivialen Matrixeinträgen, die so gewählt werden können, dass sie in getrennten Zeilen und Spalten stehen.



Eingangsverbunden

Ausgangsverbunden

3.2.1 Strukturelle Steuerbarkeit

Eine Klasse \mathcal{S} von Systemen ist strukturell steuerbar, wenn

- \mathcal{S} eingangsverbunden und
- $s - \text{Rang} \begin{pmatrix} S_A & S_B \end{pmatrix} = n$

Daraus folgt, dass es mindestens ein System

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \Sigma \in \mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$$

gibt, das steuerbar ist.

3.2.2 Strukturelle Beobachtbarkeit

Eine Klasse \mathcal{S} von Systemen ist strukturell beobachtbar, wenn

- \mathcal{S} ausgangsverbunden und
- $s - \text{Rang} \begin{pmatrix} S_A \\ S_C \end{pmatrix} = n$

Daraus folgt, dass es mindestens ein System

$$\Sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \Sigma \in \mathcal{S}(S_A, S_B, S_C)$$

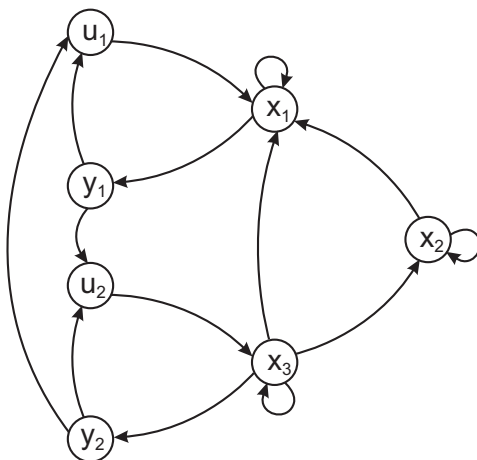
gibt, das beobachtbar ist.

3.3 Schleifenfamilie

Unter einer **Schleifenfamilie** versteht man die Menge an geschlossenen Pfaden, die keine gemeinsamen Knoten enthalten. Zur Bestimmung der Schleifenfamilie muss eine vollständige Ausgangsrückführung hinzugefügt werden (Ausgänge mit Eingängen verbinden).

Die **Weite** der Schleifenfamilie gibt die Anzahl der Zustandsknoten in der Schleifenfamilie an.

Beispiel:



1. Schleifenfamilie:

$$\{u_2 - x_3 - y_2 - u_2; u_1 - x_1 - y_1 - u_1; x_2 - x_2\}$$

Weite = $n = 3$

2. Schleifenfamilie:

$$\{u_2 - x_3 - x_2 - x_1 - y_1 - u_2\}$$

Weite = $n = 3$

3.4 Strukturell feste Eigenwerte

Strukturell feste EW sind EW, die nicht steuerbar oder nicht beobachtbar sind. Es gibt folgende zwei Typen:

- Typ 1:
 \mathcal{S} ist entweder nicht eingangsverbunden oder nicht ausgangsverbunden oder beides.
- Typ 2:
Im Strukturgraphen gibt es keine Schleifenfamilie der Weite n

4 Stabilität von MIMO-Systemen

Definitionen:

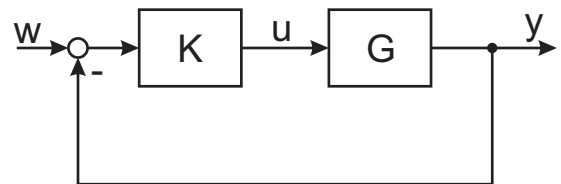
• **Zustandsstabilität:**

Der Gleichgewichtszustand $x^* = 0$ ist stabil, wenn es für jede beliebige Umgebung ϵ eine Umgebung um den Gleichgewichtspunkt mit dem Radius δ gibt, sodass aus $\|x_0\| < \delta$ die Beziehung $\|x(t)\| < \epsilon \forall t \geq 0$ folgt. Für asymptotische Stabilität wird zusätzlich gefordert, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$ gilt.

• **Ein-/Ausgangs-Stabilität:**

Wenn für verschwindende Anfangsauslenkungen $x_0 = 0$ und ein beliebiges beschränktes Eingangssignal das Ausgangssignal beschränkt bleibt.

4.1 Frequenzbereichsbedingungen für Rückführsysteme



Sei

$$G_{ol} = G(s)K(s)$$

$$F(s) = I + G_{ol} = I + G(s)K(s)$$

Für den dargestellten geschlossenen Kreis gilt dann:

$$G_w(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1} = G_{ol}F^{-1}(s)$$

$$F^{-1}(s) = \frac{1}{\det(F(s))} \text{adj}(F(s))$$

wobei adj die Adjunkte der Matrix ist, also die Transponierte jener Matrix, deren Einträge die Unterdeterminanten sind.

Der Regelkreis ist genau dann E/A-stabil, wenn für die Pole \bar{s}_i des geschlossenen Kreises gilt:

$$\det(I + G(s)K(s)) = 0; \quad \text{Re}(\bar{s}_i) < 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

4.1.1 Hsu-Chen-Theorem

Wenn das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist und der geschlossene und der offene Kreis keine gemeinsamen EW haben, dann kann die Determinante der Rückfuhrdifferenzmatrix $F(s)$ in Abhängigkeit der Pole \bar{s}_i

des geschlossenen Kreises und den Polen s_i des offenen Kreises geschrieben werden:

$$\det(F(s)) = k \cdot \frac{\prod_{i=1}^n (s - \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}$$

Unter Annahme vollständiger Beobachtbarkeit und Steuerbarkeit können somit die EW des geschlossenen und des offenen Kreises aus $F(s)$ berechnet werden.

4.1.2 Nyquistkriterium (MIMO-Fall)

Voraussetzung:

- Der offene Kreis ist nicht sprungfähig ($D_{ol} = 0$)

Der offene Kreis mit der Übertragungsfunktionsmatrix $G_{ol}(s)$ führt genau dann auf einen (E/A-)stabilen geschlossenen Regelkreis, wenn

$$\Delta arg_{\text{sol}}(\det(F(j\omega))) = \left(n^+ + \frac{n^0}{2} \right) \pi$$

$$\Delta arg(\det(F(j\omega))) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} arg(\det(F(j\omega)))$$

für ω von 0 bis ∞ gilt.

n^+ : Anzahl der Pole von $G_{ol}(s)$ mit $Re(s_i) > 0$

n^0 : Anzahl der Pole von $G_{ol}(s)$ mit $Re(s_i) = 0$ (mehrfache Pole zählen mehrfach!)

Wenn der offene Kreis stabil ist ($n^+ = n^0 = 0$) und die Nyquistkurve $\det(F(j\omega))$ den Ursprung der komplexen Ebene nicht umschließt, dann ist der geschlossene Regelkreis stabil.

Im Unterschied zum Nyquistkriterium für einschleifige Regelkreise liegt der kritische Punkt jetzt nicht mehr bei -1 , sondern im Ursprung der komplexen Ebene.

Das Nyquistkriterium kann auch anhand der EW der Matrix $F(s)$ ausgedrückt werden:

Ein stabiler offener Kreis führt genau dann auf einen stabilen Regelkreis, wenn die EW $\lambda_{F_i}(s)$ der Matrix $F(s)$ den Ursprung der komplexen Ebene insgesamt nicht umschlingen:

$$\sum_{i=1}^r \Delta arg(\lambda_{F_i}(s)) = 0$$

4.1.3 Bedingung des spektralen Radius

Sei $G_{ol}(s)$ nicht sprungfähig und E/A-stabil. Wenn

$$\rho(G_{ol}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega$$

dann ist der geschlossene Kreis E/A-stabil.

Diese Bedingung ist nur hinreichend und nicht notwendig für die Stabilität.

Der Spektralradius ist der betragsmäßig größte EW.

4.1.4 Small gain Theorem

Sei $G_{ol}(s)$ nicht sprungfähig und E/A-stabil. Wenn

$$\|G_{ol}(j\omega)\| < 1 \quad \forall \omega$$

dann ist der geschlossene Regelkreis E/A-stabil.

Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Matrix-Norm.

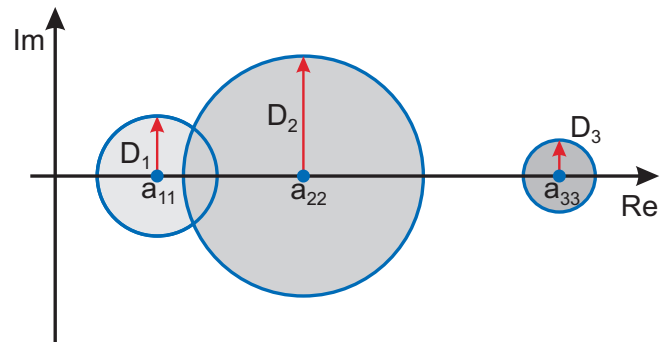
4.1.5 Gershgorintheorem

Sei A eine komplexe Matrix und sei D_i die Summe der nicht-diagonal-Einträge der i -ten Zeile. Dann gilt für jeden EW λ der Matrix A , dass es mindestens einen Index i gibt, sodass

$$|\lambda - a_{ii}| \leq D_i$$

Dieser Sachverhalt ist auch auf die Spaltenelemente anwendbar.

Geometrisch interpretiert beschreibt die Ungleichung Kreisflächen, die sogenannten Gershgorinkreise, mit Mittelpunkten a_{ii} und Radius D_i . Das Theorem besagt also, dass alle n EW innerhalb der n Kreise liegen.



Diagonaldominanz:

Die $r \times r$ Rückführdifferenzmatrix $F(s)$ heißt **zeilendominant**, wenn

$$|F_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^r |F_{ij}(s)| \quad s \in \mathcal{D}$$

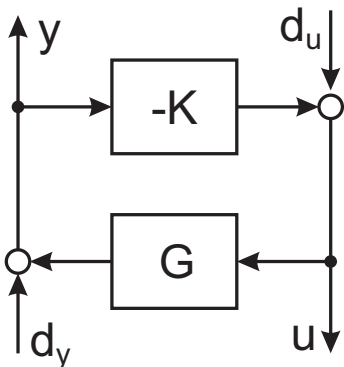
und sie heißt **spaltendominant**, wenn

$$|F_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^r |F_{ji}(s)| \quad s \in \mathcal{D}$$

Ist die Matrix entweder zeilen- oder spaltendominant, so wird sie als **diagonaldominant** bezeichnet.

Sei G_{ol} stabil. Wenn $F(s)$ diagonaldominant ist und für die Hauptdiagonalelemente $F_{ii}(s)$ jeweils das SISO-Nyquistkriterium erfüllt ist, dann ist der geschlossene Kreis stabil.

4.2 Interne Stabilität von Rückführsystemen



$$u = (I + KG)^{-1}d_u - K(I + GK)^{-1}d_y$$

$$y = G(I + KG)^{-1}d_u + (I + GK)^{-1}d_y$$

Das Rückführsystem ist genau dann intern stabil, wenn alle vier Übertragungsfunktionsmatrizen stabil sind.

Angenommen, es gibt keine Pol-NS-Kürzungen in der RHE zwischen $G(s)$ und $K(s)$, dann ist das Rückführsystem genau dann intern stabil, wenn eine der vier Übertragungsfunktionen stabil ist.

4.3 Lyapunov-Stabilität und Quadratische Stabilität

Sei

$$\dot{x} = Ax; \quad x(0) = x_0$$

4.3.1 Lyapunov-Stabilität

Ein Gleichgewichtspunkt x^* eines autonomen Systems heißt

- **stabil**, wenn es zu jedem gegebenen $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ gibt, sodass

$$\|x_0 - x^*\| < \delta(\epsilon) \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0$$

- **asymptotisch stabil**, wenn er stabil und attraktiv ist, sodass

$$\|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*\| = 0$$

4.3.2 Direkte Methode von Lyapunov

Sei $x^* \in X$ eine Ruhelage des Systems $\dot{x} = f(x), x(0) = x_0$. Die Ruhelage ist

- **stabil**, falls folgende Eigenschaften gelten:

- 1) $V(x^*) = 0$
- 2) $V(x) > 0$ für alle $x \neq x^*$
- 3) $\dot{V} = \frac{d}{dt}V(x) \leq 0$

- **asymptotisch stabil**, falls sie stabil ist und $\dot{V}(x) < 0$.

4.3.3 Quadratische Stabilität

Das LTI-System mit $x^* = 0$ heißt quadratisch stabil, wenn es asymptotisch stabil ist im Sinne von Lyapunov, wobei die Lyapunovfunktion folgende Form besitzt:

$$V(x) = x^T P x; \quad P = P^T \succ 0$$

Ein LTI-System ist genau dann zustandsstabil, wenn es quadratisch stabil ist.

Seien P und Q symmetrische, positiv definite Matrizen, dann muss gelten:

$$A^T P + P A = -Q$$

Vorgehensweise, um asymptotische Stabilität nachzuweisen:

- 1) Wähle Q als symmetrische, positiv definite Matrix (z.B. $Q = I_n$)
- 2) Einsetzen von allgemeinem symmetrischen Ansatz für P :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

- 3)
 - Falls P nicht positiv definit \Rightarrow System nicht asymptotisch stabil
 - Falls P positiv definit \Rightarrow System asymptotisch stabil

Eine symmetrische Matrix ist positiv definit, falls gilt:

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i$$

5 Reglerentwurfverfahren

Allgemeines Regelgesetz für LTI-Systeme:

$$u(t) = -Kx(t) + Lw(t); \quad K \in \mathbb{R}^{r \times n}; L \in \mathbb{R}^{r \times q}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = (A - BK)x + BLw$$

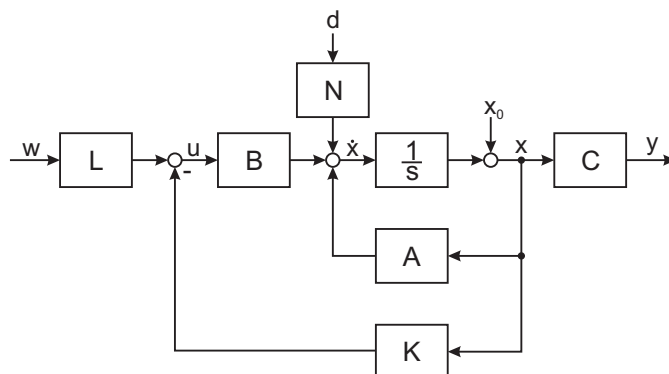
$$y = Cx$$

Anforderungen:

- Reglerstabilität (Rückführmatrix K):

$$x(t) \rightarrow 0, \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ mit } w = 0$$
- Stationäre Genauigkeit (Vorfiltermatrix L):

$$y(t) \rightarrow w, \quad \text{für } t \rightarrow \infty \text{ mit } w = \text{const.}$$



5.1 Wahl der Vorfiltermatrix L

Um stationäre Genauigkeit zu erreichen, muss gelten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow L &= [C(BK - A)^{-1}B]^{-1} \quad (\text{für } q = r) \end{aligned}$$

Die benötigten Inversen existieren, wenn gilt:

1) System asymptotisch stabil:

$$\operatorname{Re}\{\lambda(A - BK)\} < 0 \quad \forall \lambda(A - BK)$$

2) Es gibt keine invariante Nullstelle η_i in Null:
(Die INS des geregelten Systems entsprechen generell genau den INS des unregulierten Systems)

$$\det(R_K(\eta)) = \det \begin{pmatrix} \eta I - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Diese Vorgehensweise ist allerdings nur anwendbar, wenn sich der Führungsvektor w im Vergleich zur Regelkreisdynamik relativ langsam ändert; Ansonsten ist die Entkopplung nach Falb-Wolovich notwendig.

5.2 Vollständige Modale Synthese nach Roppenecker

Die Rückführmatrix K zur Polvorgabe nach Roppenecker ergibt sich über

$$\begin{aligned} K &= (p_1, \dots, p_n) [(A - \lambda_{K1}I)^{-1}Bp_1, \dots, (A - \lambda_{Kn}I)^{-1}Bp_n]^{-1} \\ &= (p_1, \dots, p_n)(v_{K1}, \dots, v_{Kn})^{-1} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} v_{Ki} &= (A - \lambda_{Ki}I)^{-1}Bp_i \\ (A - \lambda_{Ki}I)v_{Ki} &= Bp_i \end{aligned}$$

λ_{Ki} : Gewünschte Regelungseigenwerte von $A - BK$

p_i : Parametervektoren (beliebig wählbar)

v_{Ki} : Eigenvektoren von $A - BK$

Voraussetzungen:

- B hat vollen Rang und
- EV v_{Ki} sind linear unabhängig (z.B. wenn die EW λ_{Ki} einfach und von den Strecken-EW λ_i verschieden sind).

Vorgehensweise:

- 1) Regelungs-EV v_{Ki} aus λ_{Ki} und p_i berechnen.
- 2) Reglermatrix K bestimmen.
- 3) Vorfiltermatrix L bestimmen.

Durch gezielte Wahl der Parametervektoren p_i können bestimmte Anforderungen erfüllt werden, wie z.B.:

- Spalten von K zu Null machen: dadurch kann auf Messung der betreffenden Zustandsgröße verzichtet werden.
- Einzelne Elemente von K zu Null machen: dezentrale Zustandsrückführung
- Stellgrößenausschläge verringern.
- Robustheit erhöhen.
- Soll ein Strecken-EW erhalten bleiben, so setzt man $v_{Kj} = v_j$ und $p_j = 0$.

5.3 Regelung für Störerkopplung

Betrachtet wird folgendes System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Nd, \quad x_0 = 0 \\ y &= Cx \\ u &= -Kx \end{aligned}$$

d : Störgrößenvektor

N : Störungsabbildungsmatrix

Das Störerkopplungsproblem besteht darin, einen Zustandsregler $u = -Kx$ so zu finden, dass für alle Zeiten $t > 0$ die Störung $d(t)$ nicht auf den Ausgang $y(t)$ wirkt.

\Rightarrow Abbildung der Störung auf einen nicht beobachtbaren Unterraum.

Dies ist der Fall, wenn sich die Spaltenvektoren von N über nicht-beobachtbare Basisvektoren darstellen lassen. Dafür muss gelten:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{Ki}I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{R(\lambda_{Ki})} \begin{bmatrix} v_{Ki} \\ p_i \end{bmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \det(R(\lambda_{Ki})) &= \det \begin{pmatrix} \lambda_{Ki}I - A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Regelungs-EW entsprechen INS ($\lambda_{Ki} = \eta_i$).

Bestimmung einer vollständigen Zustandsrückführung mit Störerkopplung:

1) Bestimme linear unabhängige v_{Ki} mit

$$Cv_{Ki} = 0$$

Wenn die v_{Ki} keine Basis von N bilden, dann ist eine Störerkopplung nicht möglich.

2) Bestimme k (Anzahl der v_{Ki}) INS $\eta_i = \lambda_{Ki}$:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda_{Ki}I - A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} = 0$$

und berechne danach die zugehörigen p_i :

$$(\lambda_{Ki}I - A)v_{Ki} = -Bp_i$$

3) Die restlichen $n - k$ EW mit Parametervektoren sind frei wählbar

4) Berechne die EV der restlichen EW:

$$(\lambda_iI - A)v_{Ki} = 0$$

5) Berechne K :

$$K = (p_1, \dots, p_n)(v_1, \dots, v_n)^{-1}$$

6) Evtl. Test, ob $G_d = 0$:

$$G_d = C(sI - \underbrace{(A - BK)}_{A_k})^{-1}N$$

5.4 Entkopplungsregelung nach Falb-Wolovich

Betrachtet wird folgendes System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Kx + Lw \end{aligned}$$

Ziel der Entkopplungsregelung ist es, K und L so zu wählen, dass das System entkoppelt wird, d.h. damit aus dem MIMO-System q SISO-Systeme werden ($q = r$).

Definition:

- Ein MIMO-LTI-System hat die **Differenzenordnung** bzw. **den relativen Grad** $(\delta_1, \dots, \delta_q)$, wenn für $i = 1, \dots, q$ gilt:

$$\begin{aligned} c_i^T A^j B &= 0 \quad \forall j = 0, \dots, \delta_i - 2 \\ c_i^T A^{\delta_i - 1} B &\neq 0 \end{aligned}$$

wobei c_i^T die i -te Zeile von C darstellt.

- Alternative Bestimmungsmethode:
Leite y_i so oft ab (δ_i -mal), bis $y_i^{(\delta_i)}$ direkt von u abhängt.
- Die **Gesamtdifferenzenordnung** ist

$$\delta = \sum_i \delta_i$$

Vorgehensweise:

- 1) Bestimme δ und mache Fallunterscheidung:
 - $\delta = n$: weiter mit 2.
 - $\delta < n$: es existieren Entkopplungsnullstellen, die stabil sein müssen. Falls $Re(\eta) > 0$, dann ist eine Entkopplungsregelung instabil.

- 2) Berechne E :

$$E = \begin{bmatrix} c_1^T A^{(\delta_1-1)} B \\ \vdots \\ c_q^T A^{(\delta_q-1)} B \end{bmatrix}$$

Falls $\det(E) \neq 0$, dann weiter mit 3.

- 3) Vorfilter L berechnen:

$$\begin{aligned} L &= E^{-1}T \\ T &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \gamma_q \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mit den vorgegebenen Übertragungsfunktionen können dann die γ_i und M_{ij} berechnet werden:

$$\left(\frac{y_i(s)}{w_i(s)} \right)_{soll} = \frac{\gamma_i}{s^{\delta_i} + \dots + M_{i1}s + M_{i0}}$$

- 4) Reglermatrix K berechnen:

$$K = E^{-1} \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1} + \sum_{j=0}^{\delta_1-1} M_{1j} c_1^T A^j \\ \vdots \\ c_q^T A^{\delta_q} + \sum_{j=0}^{\delta_q-1} M_{qj} c_q^T A^j \end{bmatrix}$$

5.5 Direktes Nyquistkriterium zum Entwurf dezentraler Regler

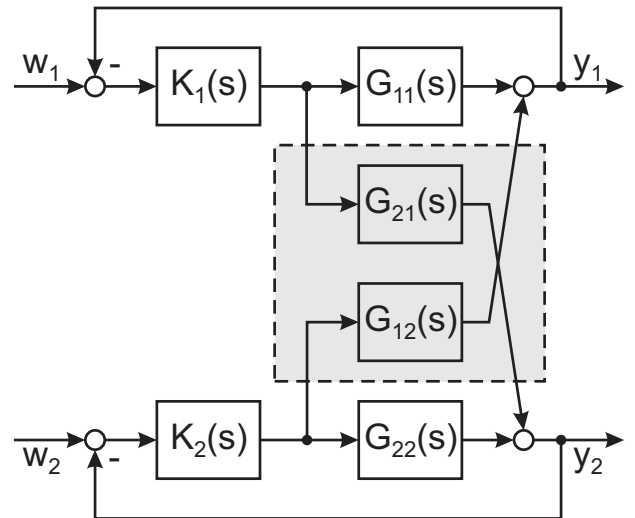
Betrachtet wird das System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

Bei der dezentralen Regelung werden die Vektoren in Teilvektoren zerlegt, die aus N Teilsystemen bestehen.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Problem ist es, die Auswirkung der durch Vernachlässigung der Querkopplungen entstehenden Störung richtig zu beurteilen.



Der aus r Eingrößenreglern $K_i(s), i = 1, \dots, r$ und der Regelstrecke $G(s)$ bestehende **Regelkreis ist stabil, falls**

- die ÜF $G_{oli}(s), i = 1, \dots, r$ der offenen Ketten der Eingrößenregelkreise den Punkt -1 insgesamt n^+ -Mal gegen den Uhrzeigersinn umschlingen. (n^+ : Anzahl der Pole mit positivem Realteil)
- $F(s) = I + G_{ol}(s)$ diagonaldominant ist.

5.5.1 Direktes Nyquistverfahren zum Entwurf dezentraler Regeleinrichtungen

Voraussetzungen:

- $D = 0$, d.h. das System ist nicht sprungfähig
- G ist näherungsweise diagonaldominant
- Die Regelstrecke ist E/A-stabil

Entwurf eines dezentralen Reglers:

- 1) Entwurf von r Eingrößenreglern $K_i(s)$ für die $G_{ii}(s)$.

- 2) Überprüfen der Diagonaldominanz von $F(s)$. Wenn dies nicht vorliegt, muss durch geeignete Wahl anderer Eingrößenregler versucht werden, Diagonaldominanz herzustellen.
- 3) Untersuchen der Regelgüte des dezentral geregelten Systems anhand von Simulationen.

5.6 Relative Gain Array (RGA)

Das RGA ist ein Maß für Interaktion in der Form von Kopplung in MIMO-Systemen. Je näher es an der Identität I ist, desto geringer ist die Interaktion.

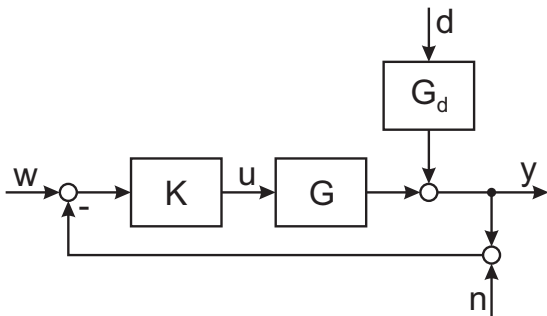
$$RGA(G) = G \times (G^{-1})^T$$

wobei \times elementweise Multiplikation bedeutet.

6 Grundlagen Performanzorientierter Regelung von MIMO-LTI-Systemen

6.1 Grundlegende Definitionen

Betrachtet werden geschlossene Regelkreise unter Störeinfluss d und Messrauschen n :



Es gilt:

$$y = \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{=G_w} w + \underbrace{(I + GK)^{-1}G_d}_{=F^{-1}} d - \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{=G_w} n$$

$$= Tw + SG_d d - Tn$$

Definitionen:

- **Sensitivitätsfunktionsmatrix S** und **komplementäre Sensitivitätsfunktionsmatrix T** :

$$S = (I + GK)^{-1} = (I + G_{ol})^{-1}$$

$$T = (I + GK)^{-1}GK = (I + G_{ol})^{-1}G_{ol}$$

$$\Rightarrow S + T = I$$

Außerdem gilt:

$$u = K(w - y - n) = KS(w - G_d d - n)$$

$$e = w - y = S(w - G_d d) + Tn$$

Die Regelabweichung in Bezug zur Führungsgröße ist somit:

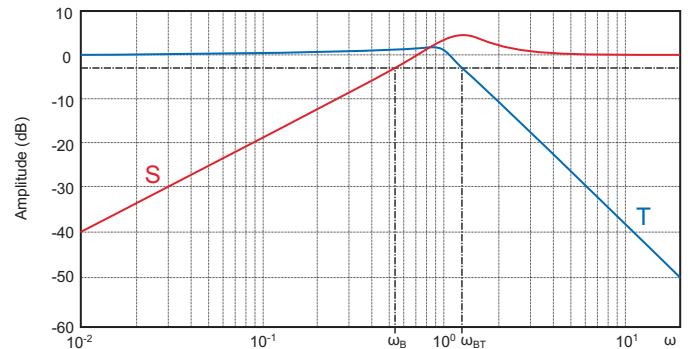
$$e = Sw$$

Definitionen:

- Sei $\omega_1 = 0$ im Intervall $[\omega_1, \omega_2]$. Die **(Sensitivitäts-)Bandbreite** (des geschlossenen Kreises) ist die Frequenz $\omega_B = \omega_2$, bei der der Amplitudenverlauf $|S(j\omega)|$ zum ersten Mal $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ ($\approx 3dB$) von unten schneidet.
- Die **Bandbreite mit Bezug auf T** , bezeichnet als ω_{BT} , ist die höchste Frequenz, bei der der Amplitudenverlauf $|T(j\omega)|$ den Wert $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ ($\approx -3dB$) von oben schneidet.
- Die **Durchtrittsfrequenz ω_c** ist die Frequenz, bei der der Amplitudenverlauf $|G_{ol}(j\omega)|$ zum ersten mal Eins von oben schneidet.
- Die **Phasendurchtrittsfrequenz ω_{180}** ist die Frequenz, bei welcher die Nyquist-Kurve von $G_{ol}(j\omega)$ zum ersten mal die negative Achse zwischen -1 und 0 schneidet.

Die Frequenzen ω_B, ω_{BT} und ω_c nehmen oftmals ähnliche Werte an. Ist dies nicht der Fall, so ist ω_B i.d.R. von größerer Bedeutung für das Regelverhalten.

Typische Verläufe von $|S|$ und $|T|$:



Die Amplitudenverläufe werden im MIMO-Fall i.d.R. über den Verlauf des größten Singulärwertes der Übertragungsfunktionsmatrizen angegeben.

6.2 Spezifikationen und Loop Shaping

6.2.1 Qualitative Forderungen zum Closed-Loop Shaping

Qualitative Ziele:

- **Gutes Folgeverhalten** liegt vor, wenn $y/w \rightarrow I$, d.h.:

$$T(j\omega) \xrightarrow{!} I$$

Für Open-Loop Shaping gilt:

Amplitudenwert von G_{ol} sollte möglichst groß sein.

- **Gute Störunterdrückung** wird realisiert, wenn $y/d \rightarrow 0$ bzw.:

$$S(j\omega) \xrightarrow{!} 0 \Rightarrow |S(j\omega)| \xrightarrow{!} 0$$

Für Open-Loop Shaping gilt:

$|G_{ol}|$ sollte möglichst groß sein.

- **Gute Rauschunterdrückung** wird erzielt, wenn $y/n \rightarrow 0$ bzw.:

$$T(j\omega) \xrightarrow{!} 0 \Rightarrow |T(j\omega)| \xrightarrow{!} 0 \text{ für hohe Frequenzen}$$

Für Open-Loop Shaping gilt:

$|G_{ol}|$ sollte möglichst klein sein.

- **Niedriger Energieaufwand** im Sinne von kleinen Stellgrößen, wenn $u/w \rightarrow 0$ bzw.:

$$K(j\omega)S(j\omega) \xrightarrow{!} 0 \Rightarrow |K(j\omega)S(j\omega)| \xrightarrow{!} 0$$

Für Open-Loop Shaping gilt:
 $|G_{ol}|$ sollte möglichst klein sein.

6.2.2 Quantitative Forderungen beim Closed-Loop Shaping und Gewichtete Sensitivität

Quantitative Forderungen:

- Gewährleistung einer bestimmten Bandbreite:

$$|S(j\omega)| \leq -3dB, \quad \forall \omega \leq \omega_B$$

- Beschränkung des stationären Folgefehlers e :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = \lim_{s \rightarrow 0} |S(s)W(s)| \stackrel{!}{<} A$$

A: maximale Amplitude

- Begrenzung des maximalen Regelfehlers:

$$\max_{\omega} |S(j\omega)| \stackrel{!}{\leq} M$$

Eine typische obere **Schrankenfunktion** ist gegeben durch:

$$w_S(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B}{s + \omega_B A}$$

Es gilt:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{w_S(j\omega)} = A \quad (\text{min. Verstärkung})$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{w_S(j\omega)} = M \quad (\text{max. Verstärkung})$$

Die Spezifikationen werden dann eingehalten, wenn gilt:

$$|w_S(s)S(s)| \leq \max \|w_S(s)S(s)\|_2 = \|w_S(s)S(s)\|_{\infty} < 1$$

$$|S(j\omega)| < \frac{1}{|w_S(j\omega)|}$$

Bedingung an die **gewichtete Sensitivität** $w_S S$:

$$|w_S S| \leq |w_S| |S| \stackrel{!}{<} 1, \quad \forall \omega$$

In gleicher Weise können auch Schrankenfunktionen für $T(w_T)$ und den Energieverbrauch $KS(w_u)$ spezifiziert werden:

$$\|w_T(\omega)T(j\omega)\|_{\infty} < 1$$

$$\|w_u(\omega)KS(j\omega)\|_{\infty} < 1$$

6.3 Beschränkungen der Performanz

6.3.1 SISO Interpolationsbeschränkung

Unter der Annahme, dass sich in $G_{ol} = GK$ keine instabilen Pole mit Nullstellen kürzen, so gilt:

- Wenn $p \in$ RHE Pol von G_{ol} ist, dann gilt:

$$S(p) = 0 \text{ und } T(p) = 1$$

- Wenn $z \in$ RHE Nullstelle von G_{ol} ist, dann gilt:

$$S(z) = 1 \text{ und } T(z) = 0$$

6.3.2 MIMO Interpolationsbeschränkung

Sei die Menge der Pole und Nullstellen von G_{ol} , die in der RHE liegen, disjunkt. Für S und T muss dann gelten:

- Wenn $p \in$ RHE Pol von G ist mit Eingangspolrichtung u_p , dann gilt:

$$S(p)u_p = 0 \text{ und } T(p)u_p = u_p$$

- Wenn $z \in$ RHE Nullstelle von G ist mit Ausgangsnullstellenrichtung y_z , dann gilt:

$$y_z^* S(z) = y_z^* \text{ und } y_z^* T(z) = 0^T$$

- Wenn $p \in$ RHE Pol von K ist mit Ausgangspolrichtung $y_{p,K}$, dann gilt:

$$y_{p,K}^* S(p) = 0^T \text{ und } y_{p,K}^* T(p) = y_{p,K}^*$$

- Wenn $z \in$ RHE Nullstelle von K ist mit Eingangsnulstellenrichtung $u_{z,K}$, dann gilt:

$$S(z)u_{z,K} = u_{z,K} \text{ und } T(z)u_{z,K} = 0$$

6.3.3 Bode-Sensitivitätsintegral und Wasserbetteffekt (SISO-Fall)

Sei $\{p_i : i = 1, \dots, n_p\}$ die Menge der Pole von G_{ol} in der RHE, G_{ol} ist rational mit relativem Grad $\delta \geq 1$. Wenn der geschlossene Regelkreis stabil ist, dann gilt für

- G_{ol} proper mit $\delta = 1$, dass

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = -\frac{\pi}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} s G_{ol} + \pi \sum_{i=1}^{n_p} \text{Re}(p_i)$$

- $G_{ol} = G_{ol,0} e^{-s\tau}$, $\tau > 0$, $G_{ol,0}$ streng proper (bzw. $\delta > 1$), dass

$$\int_0^{\infty} \log |S(j\omega)| d\omega = \pi \sum_{i=1}^{n_p} \text{Re}(p_i)$$

6.3.4 Poisson-Sensitivitätsintegrale und Sensitivitätsspeaks (SISO-Fall)

Blaschke-Produkt der NS und Pole in der RHE:

$$B_S(s) = \prod_{i=1}^{n_p} \frac{p_i - s}{p_i^* + s} \text{ und } B_T(s) = \prod_{i=1}^{n_z} \frac{z_i - s}{z_i^* + s}$$

Diese Blaschke-Produkte sind Allpassfunktionen.

Es ergibt sich:

$$G_{ol}(s) = \tilde{G}_{ol}(s) B_S^{-1}(s) B_T(s) e^{-s\tau}, \quad \tau > 0$$

$$S(s) = \tilde{S}(s) B_S(s)$$

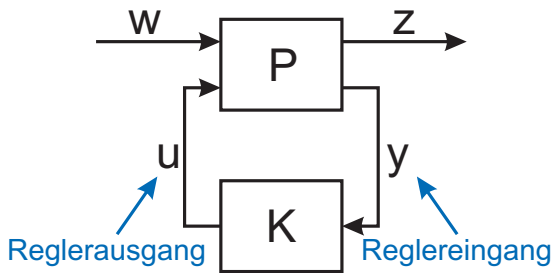
$$T(s) = \tilde{T}(s) B_T(s) e^{-s\tau}$$

Sei der offene Kreis G_{ol} faktorisiert (wie oben) und sei $z = \sigma_z + j\omega_z$ eine NS von G_{ol} in der RHE. Wenn das geschlossene System stabil ist, dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \log |S(j\omega)| \frac{\sigma_z}{\sigma_z^2 + (\omega_z - \omega)^2} d\omega = \pi \log |B_S^{-1}(z)|$$

7 H_∞ -Regelung

7.1 PK-Struktur



- P : Verallgemeinerte Strecke
- K : Regler
- w : Exogener Eingang (z.B. Referenzsignale, Rauschen, Störungen)
- z : Exogener Ausgang (stellt nicht den Ausgang der Strecke $G(s)$ dar, sondern das Performanzsignal, das durch den Regler angepasst werden soll)
- y : Reglereingang

Ziel:

Performanz von N soll garantiert werden mit stabilisierendem Regler K .

7.1.1 Analyse der verallgemeinerten Strecke im Laplace-Bereich

Vorgehen zum Erhalten der PK-Struktur:

- 1) Sammeln aller Signale, die von außen auf das System wirken, in dem Vektor w .
- 2) Bestimmen von z in Abhängigkeit von allen Eingängen, die in w zusammengefasst sind.
- 3) Bestimmen von y in Abhängigkeit aller Eingänge, die in w zusammengefasst sind. Dann gilt $u = Ky$.
- 4) Bestimmen der verallgemeinerten Strecke P durch

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

Oftmals wird P partitioniert in:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

sodass gilt:

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} z &= Nw \\ u &= Ky \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} := F_l(P, K) = P \star K$$

7.1.2 Beschreibung der verallgemeinerten Strecke im Zeitbereich

Die Zustandsraumdarstellung für P lautet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned}$$

K kann beschrieben werden durch:

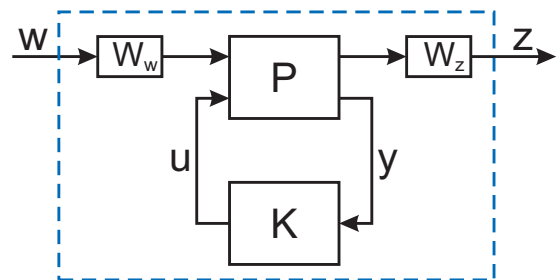
$$\begin{aligned} \dot{x}_K &= A_Kx + B_Ky \\ u &= C_Kx_K + D_Ky \end{aligned}$$

falls eine LTI-Reglerdynamik erlaubt ist. Für einen statischen Regler F zur Zustandsrückführung gilt:

$$u = Fx$$

7.1.3 Mixed sensitivity design

Um ein sinnvolles Reglersyntheseproblem zu erhalten, ist es notwendig, ein gewichtetes Eingangssignal $\tilde{w}(s) = W_w(s)w(s)$ und ein gewichtetes Ausgangssignal $\tilde{z}(s) = W_z(s)z(s)$ einzuführen.



7.2 H_∞ -optimale Reglersynthese

Das Standard H_∞ -Reglerproblem ist der Versuch, einen stabilisierenden Regler K für eine gegebene Strecke P zu finden.

Die vorgegebene Performanz wird eingehalten, wenn gilt:

$$\|N\|_\infty < 1$$

Ziel ist es, die Optimierungsfunktion $\|N\|_\infty$ zu minimieren.

Das suboptimale Reglersyntheseproblem lautet:

Finde

$$\|N\|_\infty < \gamma$$

sodass K die Strecke P stabilisiert.

8 Appendix

8.1 Singulärwertzerlegung

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ wird wie folgt berechnet:

- 1) Berechne

$$B = A^T A$$

- 2) Berechne die nicht-negativen EW von B :

$$\det(\lambda_i I - B) = 0$$

und nummeriere sie in der Reihenfolge

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

3) Berechne v_1, v_2, \dots, v_n :

$$(\lambda_i I - B)\tilde{v}_i = 0$$

$$v_i = \frac{1}{|\tilde{v}_i|} \cdot \tilde{v}_i$$

$$V = [v_1, \dots, v_n]$$

4) Die Singulärwerte berechnen sich wie folgt:

$$\sigma_{ii} = \sqrt{\lambda_i}; \quad i = 1, 2, \dots, k = \min(m, n)$$

5) Berechne u_1, u_2, \dots, u_m :

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

Falls $m > n$ oder falls $\sigma_i = 0$, müssen die Vektoren zu einer Orthonormalbasis ergänzt werden.

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$$

Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>