

Inhaltsverzeichnis

I Mathematik 4	1	9 Funktionentheorie	8
1 Wiederholung	1	9.1 Komplexe Differenzierbarkeit	8
1.1 Matrixnormen	1	9.1.1 Cauchy-Riemannsche DGL	8
1.2 Wichtige Reihen	1	9.1.2 Folgerungen	8
2 Grundbegriffe der Numerik	2	9.2 Komplexe Integration	8
2.1 Gleitkomma-Arithmetik	2	9.2.1 Kurvenintegrale	8
2.2 Kondition	2	9.2.2 Cauchy-Integralformel	8
2.3 Stabilität	3	9.3 Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen	8
3 Numerische lineare Algebra	3	9.4 Laurent-Reihen und Singularitäten	8
3.1 Dreiecksmatrizen	3	9.5 Residuenkalkül	9
3.1.1 Vorwärts- / Rückwärtssubstitution	3		
3.2 Nachiteration	3		
3.3 LR/LU-Zerlegung	3		
3.4 LRP/LUP-Zerlegung	4		
3.5 Cholesky-Zerlegung	4		
3.5.1 Rekursiver Algorithmus zur Berechnung von R	4		
3.6 Householder-Spiegelung	4		
3.7 QR-Zerlegung	4		
3.7.1 QR-Algorithmus	4		
4 Ausgleichsprobleme	5		
4.1 Lineares Ausgleichsproblem	5		
4.2 Lösen mit Normalengleichung	5		
4.3 Lösen mit QR -Zerlegung	5		
5 Fixpunktiteration	5		
5.1 Kontraktion	5		
5.2 Banach'scher Fixpunktsatz	6		
5.3 Konvergenzgeschwindigkeit	6		
6 Iterative Löser für LGS	6		
6.1 Stationäre Fixpunktiteration	6		
6.1.1 Dämpfung	6		
6.2 Jacobi-Verfahren	6		
6.2.1 Konvergenz	6		
6.3 Gauß-Seidel-Verfahren	6		
6.3.1 Konvergenz	6		
7 Nichtlineare Gleichungen	6		
7.1 Lösbarkeit	6		
7.2 Kondition	6		
7.3 Bisektionsverfahren	6		
7.3.1 Algorithmus	6		
7.4 Newton-Verfahren	7		
7.4.1 Mehrdimensional	7		
8 Optimierung	7		
8.1 Optimalitätsbedingungen	7		
8.2 Newton-Verfahren	7		
8.3 Abstiegsverfahren	7		
8.3.1 Algorithmus	7		
8.3.2 Gradientenverfahren	7		
8.4 Globalisiertes Newton-Verfahren	7		

Teil I Mathematik 4

1 Wiederholung

1.1 Matrixnormen

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, dann definiert

$$\| \|A\| \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Norm.
Außerdem gilt:

1) Submultiplikativität

$$\| \|AB\| \| \leq \| \|A\| \| \cdot \| \|B\| \|$$

2) Verträglichkeit

$$\| \|Ax\| \| \leq \| \|A\| \| \cdot \| \|x\| \|$$

Die von der **Maximumsnorm** $\|\cdot\|_\infty$ induzierte Matrizen-norm ist die "maximale Zeilensumme".

$$\| \|A\| \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Die von der **l_1 -Norm** $\|\cdot\|_1$ induzierte Matrizen-norm ist die "maximale Spaltensumme":

$$\| \|A\| \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

Sei A eine symmetrische Matrix, dann gilt:

$$\| \|A\| \|_2 = |\lambda_{max}| = \{ |\lambda| \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenwert von } A \}$$

Für beliebige $\mathbb{R}^{n \times n}$ -Matrizen gilt:

$$\| \|A\| \|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Spektralradius})$$

Die Eigenwerte von A und A^{-1} sind zueinander invers.

$$\Rightarrow \| \|A^{-1}\| \|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}}$$

1.2 Wichtige Reihen

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad x \in (-1, 1]$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Für alternierende Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \leq 0$ und monoton fallend (z.B. \ln, \sin, \cos) gilt nach dem **Leibniz-kriterium**:

$$\underbrace{\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^N (-1)^k a_k \right|}_{\text{Restglied}} \leq a_{N+1}$$

Für die Exponentialreihe gilt:

$$\underbrace{\left| e^x - \sum_{k=0}^N \frac{x^k}{k!} \right|}_{\text{Restglied}} \leq 2 \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

2 Grundbegriffe der Numerik

2.1 Gleitkomma-Arithmetik

Es werden Zahlen der Form

$$a = (-1)^s \cdot m \cdot b^e$$

betrachtet, mit $b \in \mathbb{N}, b \geq 2, s \in \{0, 1\}$ und

$$m = \sum_{i=0}^{t-1} m_i b^{-i}; \quad m_i \in \{0, \dots, b-1\}$$

$$e = \sum_{i=0}^{r-1} e_i b^i - \underbrace{(b^{r-1} - 1)}_{\text{bias}}; \quad e_i \in \{0, \dots, b-1\}$$

wobei $t \geq 2$ und $r \geq 2$ die Genauigkeiten darstellen.

Nachfolgend sei $b = 2$.

IEEE "single":

32 Bit (s : 1 Bit, e : 8 Bit, m : 23 Bit)

IEEE "double":

64 Bit (s : 1 Bit, e : 11 Bit, m : 52 Bit)

Definitionen:

- $a \in \mathbb{R}$ heißt **normierte Gleitkommazahl** ($a \in \mathbb{M}_{t,r}^N$), falls eine Darstellung existiert mit $m_0 = 1$ und $e_{\min} < e < e_{\max}$, wobei gelte:

$$e_{\min} = -b^{r-1} + 1$$

$$e_{\max} = b^{r-1}$$

- $a \in \mathbb{R}$ heißt **subnormale Gleitkommazahl** ($a \in \mathbb{M}_{t,r}^S$), falls $e = e_{\min}$ und $m_0 = 0$, wobei nicht alle m_i Null sind.

$$\Rightarrow a = (-1)^s \left(\sum_{i=1}^{t-1} m_i 2^{-i} \right) 2^{e_{\min}+1}$$

- Sonderfälle

- "0": $\forall i: m_i = 0, e_i = 0$

- " ∞ ": $\forall i: m_i = 0, e_i = 1$

- "NaN": $\forall i: e_i = 1$, wobei nicht alle m_i Null sind.

- $\mathbb{M}_{t,r} = \mathbb{M}_{t,r}^N \cup \mathbb{M}_{t,r}^S \cup \{\pm\infty\} \cup \{NaN\}$

- Der Abstand von 1 zur nächstgrößeren Zahl in $\mathbb{M}_{t,r}$ ist:

$$\text{eps} = 2^{-(t-1)} \quad (\text{Maschinengenauigkeit})$$

- Rundung: $\text{rd}_{t,r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}_{t,r}^N$

Für die IEEE-754-Standardrundung gilt:

$$\frac{|x - \text{rd}_{t,r}|}{|x|} \leq \frac{\text{eps}_t}{2} \quad \text{für } x \neq 0$$

Für alle $x, y \in \mathbb{M}_{t,r}^N$ und $*$ $\in \{+, -, \cdot, /$ gilt:

$$x \otimes y = \text{rd}_{t,r}(x * y)$$

2.2 Kondition

Seien x, y normierte Vektorräume (mit Norm $\|\cdot\|$).

Ein Problem ist eine Funktion $f : x \rightarrow y$.

Gesucht ist $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$ im Vergleich zu δx .

Die **absolute Kondition** von f im Punkt $x \in X$ ist

$$\kappa_{\text{abs}}^f(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| < \delta} \frac{\|\delta f\|}{\|\delta x\|}$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar (mit $\|\cdot\| = |\cdot|$), dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{abs}}(x) &= |f'(x)| \\ \Rightarrow \|\delta f\| &\leq \kappa_{\text{abs}} \cdot \|\delta x\| \end{aligned}$$

Für die **relative Kondition** gilt:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| < \delta} \frac{\frac{\|\delta f\|}{\|f(x)\|}}{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\|\delta x\| < \delta} \frac{\|\delta f\| \cdot \|x\|}{\|f(x)\| \cdot \|\delta x\|}$$

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{rel}} &= \frac{|f'(x)|}{\frac{|f(x)|}{|x|}} = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|} \\ \Rightarrow \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} &\leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \end{aligned}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b \rightarrow f(b) = A^{-1}b = x$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \kappa_{\text{abs}}(b) &= \|f'(b)\| = \|A^{-1}\| \\ \kappa_{\text{rel}}(b) &= \frac{\|A^{-1}\|}{\frac{\|A^{-1}b\|}{\|b\|}} = \|A^{-1}\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \end{aligned}$$

Für die Kondition bzgl. $\|\cdot\|_2$ gilt außerdem:

$$\kappa_{\text{rel}}(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

$\mathcal{N.B.}$:

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} + O\left(\frac{\|\tilde{x} - x\|^2}{\|x\|^2}\right)$$

2.3 Stabilität

Definitionen:

- Ein **Algorithmus** ist eine Abb. $\tilde{f} : x \rightarrow y$ mit $\tilde{f} = \tilde{f}_k \circ \dots \circ \tilde{f}_1$, wobei jeder Teilschritt $\tilde{f}_i, i = 1, \dots, k$ nur Operationen aus $\{\oplus, \ominus, \odot, \oslash, \text{rd}\}$ enthält.
- Ein Algorithmus \tilde{f} für ein Problem f heißt **rückwärtsstabil**, falls $\forall x \in X \exists \tilde{x} \in X$ mit

$$\underbrace{\tilde{f}(x)}_{(1+\epsilon)f(x)} = f(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} = O(\epsilon) \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0$$

wobei ϵ den relativen Fehler darstellt.

Ziel:

Finde zu geg. f ein \tilde{f} , sodass der Fehler $\|\tilde{f}(x) - f(x)\|$ bzw. $\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|}$ möglichst "klein" ist.

Sei \tilde{f} ein rückwärtsstabiler Algorithmus für f , dann gilt:

$$\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq O(\kappa_{\text{rel}}(x) \cdot \text{eps}) \quad \text{für } \text{eps} \rightarrow 0$$

3 Numerische lineare Algebra

3.1 Dreiecksmatrizen

Satz:

Falls $A = LR$ mit $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ untere und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix, $\det(A) \neq 0$, so ist das LGS $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ in $2n^2$ Operationen lösbar.

$\mathcal{N.B.}$

$$\sum_{k=1}^n (ak - b) = \frac{1}{2}n(an + a - 2b)$$

3.1.1 Vorwärts- / Rückwärtssubstitution

Falls A obere oder untere Dreiecksmatrix, so kann das LGS $Ax = b$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution gelöst werden.

Matlab-Code für Vorwärtssubstitution:

```
for j = 1 : n
    x(j) = (b(j) - A(j, 1 : j - 1) * x(1 : j - 1)) / A(j, j);
end
```

Matlab-Code für Rückwärtssubstitution:

```
for j = n : -1 : 1
    x(j) = (b(j) - A(j, j + 1 : n) * x(j + 1 : n)) / A(j, j);
end
```

Aufwand: je n^2 Flops

3.2 Nachiteration

Mit Hilfe der Nachiteration kann eine Näherungslösung \tilde{x} eines LGS $Ax = b$ genauer approximiert werden.

Vorgehensweise:

1) Berechne \tilde{x} :

$$A\tilde{x} = b$$

2) Berechne r :

$$r = b - A\tilde{x}$$

3) Berechne z :

$$Az = r$$

4) Die genauere Näherungslösung \hat{x} lautet:

$$\hat{x} = \tilde{x} + z$$

3.3 LR/LU-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$, $a_{ii} \neq 0$, $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ untere und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix.

Dann kann das LGS $Ax = b$ wie folgt gelöst werden:

1) Berechne L und R , sodass $A = LR$

2) Berechne y , sodass $Ly = b$ (für LRP-Zerlegung: $Ly = Pb$)

3) Berechne x , sodass $Rx = y$

Für die Berechnung von L und R wird folgender Algorithmus angewendet:

1) Setze $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ für $i \geq 1$.

2) Setze $a_{ij} = a_{ij} - l_{i1} \cdot a_{1j}$ für alle j und $i > 1$:

$$\text{Zeile } i = \text{Zeile } i - l_{i1} \cdot \text{Zeile } 1, \quad i > 1$$

3) Gehe zu Schritt 1 und ersetze alle 1er durch 2,3,4,...

Beispiel:

2	3	1	5
6	13	5	19
2	19	10	23
4	10	11	31

2	3	1	5
3	4	2	4
1	16	9	18
2	4	9	21

2	3	1	5
3	4	2	4
1	4	1	2
2	1	7	17

2	3	1	5
3	4	2	4
1	4	1	2
2	1	7	3

1. Iteration 2. Iteration 3. Iteration

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_R$$

Aufwand für Zerlegung: $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$ Flops

Das oben genannte Verfahren ist ein direktes/exaktes Lösungsverfahren (keine Verfahrensfehler; nur Rundungsfehler)

Matlab-Code:

```
[n,~] = size(A);
for k = 1:n
    I = k+1:n;
    A(I,k) = A(I,k)/A(k,k);
    A(I,I) = A(I,I) - A(I,k)*A(k,I);
end
```

3.4 LRP/LUP-Zerlegung

Die LRP-Zerlegung ist eine LU-Zerlegung mit Pivoting-Strategie:

Suche $j \geq k$, sodass $|a_{jk}^{(k)}| \geq |a_{ik}^{(k)}| \forall i \geq k$ und vertausche die j -te mit der k -ten Zeile in $A^{(k)}$.

Für $\det(A) \neq 0$ existiert eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodass gilt:

$$PA = LR$$

Definition:

Eine Matrix heißt **Permutationsmatrix**, falls sie in jeder Zeile und jeder Spalte jeweils eine 1 enthält und sonst nur 0.

Beispiel:

1	2	0	2	0,6
2	3	3	4	-2
3	5	5	4	2
4	-1	-2	3,4	-1

3	5	5	4	2
2	3	3	4	-2
1	2	0	2	0,6
4	-1	-2	3,4	-1

3	5	5	4	2
2	0,6	0	1,6	-3,2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
4	-0,2	-1	4,2	-0,6

1. Iteration

3	5	5	4	2
2	0,6	0	1,6	-3,2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
4	-0,2	-1	4,2	-0,6

3	5	5	4	2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
2	0,6	0	1,6	-3,2
4	-0,2	-1	4,2	-0,6

3	5	5	4	2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
2	0,6	0	1,6	-3,2
4	-0,2	0,5	4	-0,5

2. Iteration

3	5	5	4	2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
2	0,6	0	1,6	-3,2
4	-0,2	0,5	4	-0,5

3	5	5	4	2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
4	-0,2	0,5	4	-0,5
2	0,6	0	1,6	-3,2

3	5	5	4	2
1	0,4	-2	0,4	-0,2
4	-0,2	0,5	4	-0,5
2	0,6	0	0,4	-3

3. Iteration

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_P \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0,6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3,4 & -1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}}_L \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0,4 & -0,2 \\ 0 & 0 & 4 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_R$$

Matlab-Code:

```
[n,~] = size(A);
p = 1:n;
for k = 1:n
    [~,j] = max(abs(A(p(k:n),k)));
    j = j + (k-1);
    p([k,j]) = p([j,k]);
    I = k+1:n;
    A(p(I),k) = A(p(I),k)/A(p(k),k);
    A(p(I),I) = A(p(I),I) - A(p(I),k)*A(p(k),I);
end
```

3.5 Cholesky-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit, dann existiert eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit

$$A = R^T R$$

3.5.1 Rekursiver Algorithmus zur Berechnung von R

- 1) Ersetze a_{11} durch $\sqrt{a_{11}}$
- 2) Ersetze alle Einträge unter a_{11} durch 0
- 3) Ersetze alle Einträge rechts von a_{11} durch $\frac{a_{1i}}{a_{11}}$
- 4) Beende die Funktion, falls $n == 1$
- 5) Um den inneren Teil der Matrix zu berechnen ($A(2 : n, 2 : n)$), rufe die Funktion mit folgender Matrix auf:

$$A(2 : n, 2 : n) - A(1, 2 : n)^T \cdot A(1, 2 : n)$$

Die entstandene Matrix stellt dann R dar.

Aufwand für Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3$ Flops

3.6 Householder-Spiegelung

Die Spiegelung \tilde{x} von $x \in \mathbb{R}^k$ an der Hyperebene E_V senkrecht zu $v \in \mathbb{R}^k$ heißt Householder-Spiegelung. Es gilt:

$$\tilde{x} = \underbrace{\left(I_n - \frac{2vv^T}{\|v\|^2} \right)}_{H_v \in \mathbb{R}^{m \times m}} \cdot x$$

Sei $v \neq 0$, dann gilt:

- $H_v^T = H_v, H_v H_v = I \Rightarrow H_v$ orthogonal
- $H_{\alpha v} = H_v \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $H_v a = \mp \|a\| e_1$, falls $v = a \pm \|a\| e_1$

3.7 QR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n, \text{Rang}(A) = n, Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rechte obere Dreiecksmatrix mit

$$A = QR$$

3.7.1 QR-Algorithmus

Achtung: Falls ein LGS $Ax = b$ gelöst werden soll, dann muss b genauso wie A transformiert werden.

Vorab: Setze $A^{(1)} = A, p = \min\{m - 1, n\}$ und $k = 1$.

- 1) Setze $\tilde{A} = A^{(k)}(k : m, k : n)$ und $a = 1$. Spalte von \tilde{A}
- 2) Berechne $v = a + \text{sign}(a_1) \cdot \|a\| \cdot e_1 \in \mathbb{R}^{m-k+1}$
- 3) Berechne Update von \tilde{A} :

$$\tilde{A} \leftarrow \underbrace{\left(I - \frac{2vv^T}{\|v\|^2} \right)}_{H_v} \cdot \tilde{A} = \tilde{A} - \underbrace{\frac{2v}{\|v\|^2} \cdot (v^T \cdot \tilde{A})}_{\text{so in Matlab}}$$

- 4) Setze $Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H_v \end{pmatrix}$ (falls Q explizit berechnet werden soll)
- 5) Setze $A^{(k+1)} = Q_k \cdot A^{(k)}$ (ersetze \tilde{A} in $A^{(k)}$ mit Update aus 3.)
- 6) Erhöhe k und gehe zu Schritt 1

$$\Rightarrow R = A^{(p+1)} = Q^T A$$

$$Q = Q_1 \cdot \dots \cdot Q_p, Q^T = Q_p \cdot \dots \cdot Q_1, \text{ da } Q_k = Q_k^T$$

Falls $m = n$, so ist das LGS $Ax = b$ wie folgt lösbar:

$$\underbrace{Q^T A}_{R=A^{(p+1)}} \cdot x = \underbrace{Q^T b}_{b^{(p+1)}}$$

$$\Rightarrow Rx = b^{(p+1)}$$

Aufwand für Zerlegung:

$$\frac{4}{3}n^3 \text{ Flops, falls } m = n$$

$$2n^2 \left(m - \frac{1}{3}n \right) \text{ Flops, falls } m \gg n$$

Matlab-Code (QR_householder):

```
function A = QR_householder(A)
[m,n] = size(A);
for k = 1:min(m-1,n)
    v = A(k:end,k);
    na = norm(v);
    if v(1) >= 0
        s = 1;
    else
        s = -1;
    end
    v(1) = v(1) + s*na;
    v = [1; v(2:end)/v(1)];
    A(k:end,k+1:end) = A(k:end,k+1:end)
    -(2/(v'*v)*v)*(v'*A(k:end,k+1:end));
    A(k,k) = -s*na;
    A(k+1:end,k) = v(2:end);
end
```

Matlab-Code (Qmult_householder):

```
function B = Qmult_householder(A,B)
[m,n] = size(A);
for k = 1:min(m-1,n)
    v = [1; A(k+1:end,k)];
    B(k:end,:) = B(k:end,:) - (2/(v'*v)*v)*(v'*B(k:end,:));
end
```

Matlab-Code (LGS Ax = b lösen):

```
A = QR_householder(A);
x = rsub(triu(A), Qmult_householder(A,b));
```

4 Ausgleichsprobleme

Seien Messpunkte $t_i, b_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ gegeben. Ziel: Bestimme die n Parameter x_1 bis x_n , sodass gilt:

$$b_i \approx \varphi(t_i, x), \quad i = 1, \dots, m$$

Falls φ linear in x ist, so ist x die Lösung eines überbestimmten GLS:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b \approx Ax = \begin{pmatrix} a(t_1)^T \\ \vdots \\ a(t_m)^T \end{pmatrix} x$$

4.1 Lineares Ausgleichsproblem

Bestimme $x \in \mathbb{R}^n$ zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, sodass gilt:

$$\|b - Ax\|_2^2 = \min$$

4.2 Lösen mit Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

Für ein Polynom $b = f(t) = x_0 + x_1 t + \dots + x_n t^n$ als Ausgleichskurve gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_m & t_m^2 & \dots & t_m^n \end{pmatrix}$$

4.3 Lösen mit QR-Zerlegung

Sei eine QR-Zerlegung gegeben mit

$$Q^T b = b^{(p+1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad R = Q^T A = A^{(p+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$.

Dann gilt für das Minimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|^2 &= \|Q^T(b - Ax)\|^2 = \|Q^T b - Q^T \underbrace{QR}_A x\|^2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} x \right\|^2 = \|b_1 - \tilde{R}x\|^2 + \|b_2\|^2 \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\|b_1 - \tilde{R}x\|^2 + \|b_2\|^2 = \min \Leftrightarrow \tilde{R}x = b_1$$

5 Fixpunktiteration

Ziel: Gesucht wird ein Fixpunkt $x^* \in X$ der Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$:

$$\varphi(x^*) = x^*$$

- Ein FP x^* heißt stabil, falls $\|\varphi'(x^*)\| < 1$
- Ein FP x^* heißt instabil/abstoßend, falls $\|\varphi'(x^*)\| > 1$

5.1 Kontraktion

Eine (Selbst-)Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$ heißt Kontraktion, falls es ein festes $0 \leq L < 1$ gibt mit:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X \quad (\text{Lipschitz-stetig})$$

Ist $\varphi : X \rightarrow X$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$L = \sup_{x \in X} \|\varphi'(x)\| = \sup_{x \in X} \|J_\varphi(x)\|$$

5.2 Banach'scher Fixpunktsatz

Sei X abgeschlossen und $\varphi : X \rightarrow X$ (Selbstabbildung) eine Kontraktion. Dann besitzt φ einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in X$ und die Iteration

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen x^* .

Außerdem gelten folgende Abschätzungen:

$$\underbrace{|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|}_{\text{A-Priori}} \quad \text{und} \quad \underbrace{|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|}_{\text{A-Posteriori}}$$

5.3 Konvergenzgeschwindigkeit

Die Konvergenz der Folge (x_k) ist von der Ordnung p , wenn gilt:

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^p \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

Falls $\varphi : X \rightarrow X$ zweimal stetig diffbar ist mit FP x^* und $\varphi'(x^*) = 0$, dann konvergiert die Iteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ mindestens lokal quadratisch.

6 Iterative Löser für LGS

6.1 Stationäre Fixpunktiteration

Idee: Zerlege A additiv in $A = B - C$ mit $\det(B) \neq 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow Bx = b + Cx \\ &\Leftrightarrow x = B^{-1}b + B^{-1}Cx = \varphi(x) \\ \Rightarrow x^{(k+1)} &= \varphi(x^{(k)}) = B^{-1}b + B^{-1}Cx^{(k)} \\ &= x^{(k)} + B^{-1}(b - Ax^{(k)}) \\ \varphi(x) &= Nx + Mx^{(k)} \end{aligned}$$

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $\|M\| < 1$ für eine Operatornorm $\|\cdot\|$ hinreichend für die Konvergenz des Iteration $\varphi(x) = Nx + Mx$.

6.1.1 Dämpfung

Durch Dämpfung der FP-Iteration mit $\omega \in (0, 1]$ können die verschiedenen Verfahren noch beschleunigt werden:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \omega \cdot (Nb + Mx^{(k)}) + (1 - \omega) \cdot x^{(k)} \\ &= \omega \cdot Nb + [\omega \cdot M + (1 - \omega) \cdot I] \cdot x^{(k)} \end{aligned}$$

Falls $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nur reelle Eigenwerte $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n < 1$ besitzt, dann gilt

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{2 - \lambda_1 - \lambda_n}$$

6.2 Jacobi-Verfahren

Zerlege A additiv in eine Diagonalmatrix D und obere/untere Dreiecksmatrizen R und L :

$$A = D - (L + R)$$

Dann lautet das Jacobi-Verfahren:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}}_N b + \underbrace{D^{-1}(L + R)}_M \cdot x^{(k)} = D^{-1} \cdot [b + (L + R) \cdot x^{(k)}]$$

6.2.1 Konvergenz

Das Jacobi-Verfahren konvergiert, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- A ist strikt diagonaldominant:

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- Für den Spektralradius gilt:

$$\rho(D^{-1}(L+R)) = \rho(M) = \max\{|\lambda_i(M)| \mid i = 1, \dots, n\} < 1$$

6.3 Gauß-Seidel-Verfahren

Zerlege A additiv in eine Diagonalmatrix D und obere/untere Dreiecksmatrizen R und L :

$$A = (D - L) - R$$

Dann lautet das Gauß-Seidel-Verfahren:

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \underbrace{(D - L)^{-1} b}_N + \underbrace{(D - L)^{-1} R}_{M} \cdot x^{(k)} \\ &= (D - L)^{-1} \cdot (b + R x^{(k)}) \end{aligned}$$

Aufwand: $2n^2$ Flops

6.3.1 Konvergenz

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- A ist strikt diagonaldominant
- A ist symmetrisch und positiv definit
- Für den Spektralradius gilt:

$$\rho((D - L)^{-1} R) = \rho(M) = \max\{|\lambda_i(M)| \mid i = 1, \dots, n\} < 1$$

7 Nichtlineare Gleichungen

7.1 Lösbarkeit

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^* \in X$ mit $f(x^*) = 0$. Falls $\det(f'(x^*)) \neq 0$, so ist x^* lokal eindeutig, d.h. \exists Umgebung U von x^* , sodass $\tilde{x} \in U, f(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow \tilde{x} = x^*$.

7.2 Kondition

Für die absolute Kondition des Problems $P : f \rightarrow x^*$ bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ gilt:

$$\kappa = \left\| (f'(x^*))^{-1} \right\|$$

7.3 Bisektionsverfahren

7.3.1 Algorithmus

$$x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$$

Für $k = 0, 1, \dots$ {

STOP, falls $f(x_k) = 0$

$a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$, falls $f(a_k)f(x_k) < 0$

$a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$, falls $f(x_k)f(b_k) < 0$

$x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1})$

STOP, falls $|a_{k+1} - b_{k+1}| < 2 \cdot TOL$

}

Globale Konvergenz:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{1}{2} |I_k| = \frac{1}{2^{k+1}} |b_0 - a_0|$$

7.4 Newton-Verfahren

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, dann konvergiert das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch.

7.4.1 Mehrdimensional

Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n, X \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x^*) = 0$, dann gilt:

$$x_{k+1} = x_k - J_f^{-1}(x_k) f(x_k)$$

8 Optimierung

8.1 Optimalitätsbedingungen

Definitionen:

- $C^m(x) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } m\text{-mal stetig differenzierbar}\}$
- Sei $f \in C^1(x)$ und $\nabla f(x) = 0$ für ein $x \in X$. Dann heißt x **stationärer Punkt**.
- Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(x)$, x^* lokales Minimum. Dann ist x^* stationärer Punkt.
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ positiv definit, dann ist x^* ein **lokales Minimum**. (positive Definitheit ist hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig)
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ negativ definit, dann ist x^* ein **lokales Maximum**. (negative Definitheit ist hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig)
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ indefinit, dann ist x^* ein **Sattelpunkt**.

8.2 Newton-Verfahren

Sei $f \in C^2(x)$. Gesucht sei die Lösung von $\nabla f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - H_f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) \\ H_f(x) &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(x) & \dots & \partial_{x_1 x_n} f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n x_1} f(x) & \dots & \partial_{x_n x_n} f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Iterationsverfahren besitzt lokal quadratische Konvergenz zu einem stationären Punkt x^* von f , falls $H(x^*)$ invertierbar ist.

8.3 Abstiegsverfahren

Definition:

- $d \in \mathbb{R}^n$ heißt **Abstiegsrichtung** von f an der Stelle x , falls $\exists \delta > 0$, sodass gilt:

$$f(x + sd) < f(x) \quad \forall s \in (0, \delta]$$

8.3.1 Algorithmus

Wähle $x^{(0)}$

Für $k = 0, 1, \dots$ {

STOP, falls $\nabla f(x^{(k)}) \approx 0$

Bestimme Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ für f in $x^{(k)}$

Bestimme Schrittweite $s_k > 0$ mit $f(x^{(k)} + s_k d^{(k)}) < f(x^{(k)})$

Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k d^{(k)}$

}

8.3.2 Gradientenverfahren

Wähle im obigen Algorithmus:

$$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$$

Bestimmung der Schrittweite (2 Möglichkeiten):

1) "Exakte Schrittweite":

$$\min_{\delta > 0} f(x^{(k)} + s d^{(k)})$$

2) "Armijo-Schrittweite":

Wähle Parameter $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$

Setze $s = 1$

Für $l = 1, 2, \dots$ {

Falls $f(x^{(k)} + s d^{(k)}) - f(x^{(k)}) \leq \sigma s \cdot \nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)}$:

Akzeptiere Schrittweite: $s_k = s$

Sonst: $s \rightarrow \frac{s}{2}$

}

Dieses Verfahren konvergiert gegen einen stationären Punkt von f oder es erzeugt eine Folge $(x_{k \in \mathbb{N}}^{(k)})$, für die gilt:

- $f(x^{(k+1)}) < f(x^{(k)}) \quad \forall k$ und
- alle Häufungspunkte sind stat. Punkte von f

8.4 Globalisiertes Newton-Verfahren

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$, $\rho > 0$.

Für $k = 0, 1, \dots$ {

STOP, falls $\nabla f(x^{(k)}) \approx 0$

Löse $H_f(x^{(k)}) \tilde{d}^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$, falls möglich

Falls Newton-Gleichung nicht lösbar oder

$\nabla f(x^{(k)}) \tilde{d}^{(k)} > -\rho \|\nabla f(x^{(k)})\|^2$

$d^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$

Sonst: $d^{(k)} = \tilde{d}^{(k)}$

Bestimme Armijo-Schrittweite s_k (siehe oben)

Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k d^{(k)}$

}

9 Funktionentheorie

9.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt in z_0 komplex differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existiert.

- Ist f auf ganz U komplex differenzierbar, so heißt f analytisch.
- Kompositionen, Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten analytischer Funktionen sind wieder analytisch.
- Potenzreihen sind analytisch in ihrem Konvergenzgebiet

Wir schreiben $f(z) = f(x + iy) = F_1(x, y) + i \cdot F_2(x, y)$ und setzen:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

9.1.1 Cauchy-Riemannsche DGL

f ist genau dann in $z = x + iy$ komplex differenzierbar, falls F in (x, y) differenzierbar ist und folgende DGL erfüllt sind:

$$\partial_x F_1(x, y) = \partial_y F_2(x, y)$$

$$\partial_y F_1(x, y) = -\partial_x F_2(x, y)$$

9.1.2 Folgerungen

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch und das zugehörige reelle $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ 2-mal stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\Delta F_1(x) = \partial_1^2 F_1(x) + \partial_2^2 F_1(x) = 0$$

$$\Delta F_2(x) = \partial_1^2 F_2(x) + \partial_2^2 F_2(x) = 0$$

9.2 Komplexe Integration

9.2.1 Kurvenintegrale

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, $\gamma \in C^1([a, b], U)$, dann lautet das komplexe Kurvenintegral von f entlang von γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

Mit

$$f(z) = f(x_1 + ix_2) = f_1(z) + i f_2(z); \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) + i \gamma_2(t)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(\gamma(t)) \\ -f_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt \\ &+ i \int_a^b \begin{pmatrix} f_2(\gamma(t)) \\ f_1(\gamma(t)) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

Definitionen:

- $U \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, falls es $\forall z_1, z_2 \in U$ einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gibt, sodass $\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$.
- $U \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls das Innere jeder ganz in U verlaufenden geschlossenen Kurve zu U gehört.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch:

- Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ , die ganz in U verläuft:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

- Bei nicht geschlossenen Kurven ist das komplexe Kurvenintegral wegunabhängig.
- Dann ist für jedes $a \in U$

$$F(z) = \int_a^z f(\xi) d\xi$$

eine Stammfunktion von f und es gilt:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0)$$

9.2.2 Cauchy-Integralformel

Sei $U \subset \mathbb{C}, f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, γ geschlossen mit Innerem ganz in U , dann gilt für jeden Punkt z im Inneren von γ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

9.3 Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen

Sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, $\{|z - a| \leq r\} \subset U$ für ein $a \in U, r > 0$, dann gilt für $|z - a| < \rho < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi$

Jede beschränkte analytische Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

9.4 Laurent-Reihen und Singularitäten

Idee: Entwickle $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch in einer Reihe um die Singularität z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil (HT)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil (NT)}}$$

Definitionen:

- Sei $U \subset \mathbb{C}, f : U \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann heißt $z_0 \in U$ **Nullstelle der Ordnung m** , falls $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
- Sei $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität** von f .
 - Ist f auf einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt, so heißt z_0 **hebbare Singularität**.
 - Hat $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ für ein $m \geq 1$ eine hebbare Singularität in z_0 , dann heißt z_0 **Pol**. Das kleinste solche m heißt **Ordnung des Pols**.
 - Ansonsten heißt z_0 **wesentliche Singularität**.

Eigenschaften:

- 1) LR konvergiert, falls Hauptteil (HT) und Nebenteil (NT) konvergieren.
- 2) NT ist übliche Potenzreihe; sie habe den Konvergenzradius $R \in [0, \infty)$.
- 3) HT ist eine Potenzreihe in $w = \frac{1}{z - z_0}$; sie habe den Konvergenzradius $\frac{1}{r} \in [0, \infty)$. HT konvergiert somit, falls $|z - z_0| > r$.
- 4) Falls $0 \leq r < R \leq \infty$, so konvergiert die LR im Kreisring $\{r < |z - z_0| < R\}$.
- 5) Eine konvergente LR kann gliedweise differenziert werden.
- 6) Ist $c_{-1} = 0$, so besitzt die LR die Stammfunktion

$$\sum_{n=-\infty, n \neq -1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$$

die im selben Kreisring konvergiert.

Sei $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq r < |z - z_0| < R \leq \infty\}$, $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch, dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

mit $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz; \quad r < \rho < R$

9.5 Residuenkalkül

Idee: Verwende Laurent-Reihe zur Berechnung von Integralen.

Sei $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch. Dann lautet das Residuum von f in z_0 :

$$Res_{z_0}(f) = Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} f(z) dz$$

Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>