Inhaltsverzeichnis

Teil I Wahrscheinlichkeitstheorie

1 Wahrscheinlichkeitsräume

Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** besteht aus einem Tripel $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

1.1 Ergebnismenge Ω

Die nichtleere Menge Ω aller relevanten Ergebnisse eines Experiments heißt **Ergebnismenge**.

1.2 Ereignisalgebra $\mathbb{F}$

Das Mengensystem $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ (Potenzmenge von Ω) wird als **Ergebnisalgebra** bezeichnet, wenn es folgende Bedingungen erfüllt:

i) $\Omega \in \mathbb{F}$
ii) $A \in \mathbb{F} \Rightarrow A^c \in \mathbb{F}$
iii) $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^k A_i \in \mathbb{F}$

Daraus folgt weiterhin:

i) $\emptyset \in \mathbb{F}$
ii) $A_i \backslash A_j \in \mathbb{F}$
iii) $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathbb{F}$

Das Mengensystem $\mathbb{F}$ wird als **σ-Algebra** bezeichnet, falls $k \to \infty$ und obige Bedingungen erfüllt sind.

Das Tupel $(\Omega, \mathbb{F})$ heißt **Ereignisraum** oder **messbarer Raum**.

1.3 Wahrscheinlichkeitsmaß P

i) $P(A) \geq 0$
ii) $P(\Omega) = 1$
iii) $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Weitere Eigenschaften von P:

i) $P(A^c) = 1 - P(A)$
ii) $P(\emptyset) = 0$
iii) $P(A \backslash B) = P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
v) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
vi) $P(\bigcup_{i=1}^k A_i) \leq \sum_{i=1}^k P(A_i)$

2 Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

2.1 Bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(B \mid A) \triangleq P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

2.1.1 *Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit*

B_i sei eine Zerlegung von Ω, dann gilt:

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A \mid B_i)P(B_i)$$

2.1.2 *Satz von Bayes*

$$P(B_j \mid A) = \frac{P(A \mid B_j)P(B_j)}{\sum_{i \in I} P(A \mid B_i)P(B_i)} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

2.1.3 *Multiplikationssatz*

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A|B \cap C \cap D)P(B|C \cap D)P(C|D)P(D)$$

2.2 Stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B sind dann von einander unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dann gilt auch:

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq J \subset I$ gilt dann:

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

3 Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeitsverteilung

3.1 Zufallsvariablen

$\mathsf{X} : \Omega \to \Omega'$ heißt Zufallsvariable, wenn für jedes $A' \in \mathbb{F}'$ ein $A \in \mathbb{F}$ existiert mit $A = \{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$.

a) $\mathsf{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **reelle Zufallsvariable**, wenn $\{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) \leq x\} = \{\mathsf{X} \leq x\} \in \mathbb{F} \; \forall \, x \in \mathbb{R}$.
b) $\vec{\mathsf{X}} : \Omega \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ heißt **mehrdimensionale (reelle) Zufallsvariable**, wenn $\vec{\mathsf{X}} = [\mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_n]^T$.
c) $\mathsf{X} : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **komplexe Zufallsvariable**, wenn $\mathrm{Re}(\mathsf{X})$ und $\mathrm{Im}(\mathsf{X})$ reelle Zufallsvariablen sind.
d) Zufallsvariablen $\mathsf{X} : \Omega \to \Omega'$, die Ω auf endliche oder abzählbare Mengen Ω' abbilden, heißten **diskrete Zufallsvariablen**.

3.2 Verteilung einer Zufallsvariable

$P_{\mathsf{X}}(A') \triangleq P(\{\omega \in \Omega \mid \mathsf{X}(\omega) \in A'\}) = P(\{\mathsf{X} \in A'\}) \; \forall \; A' \in \mathbb{F}'$ heißt **Verteilung** von X.

3.2.1 *Zähldichte für diskrete Zufallsvariablen (PMF)*

$$p_{\mathsf{X}}(x) = P(\{\mathsf{X} = x\})$$

3.2.2 *Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (WDF)*

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{dF_{\mathsf{X}}(x)}{dx}$$

WDF einer **diskreten** Zufallsvariable X:

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \sum_{\xi \in \Omega'} p_{\mathsf{X}}(\xi)\delta(x - \xi)$$

3.2.3 Stetige kumulative Verteilungsfunktion (KMF)

$$F_{\mathsf{X}}(x) = P(\{\mathsf{X} \le x\})$$

$$F_{\mathsf{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathsf{X}}(\xi) \mathsf{d}\xi$$

Eigenschaften:

i) $F_{\mathsf{X}}(x)$ ist monoten wachsend.

ii) $F_{\mathsf{X}}(x)$ ist rechsseitig stetig.

iii) $\lim_{x\to-\infty} F_{\mathsf{X}}(x) = 0, \lim_{x\to\infty} F_{\mathsf{X}}(x) = 1$

iv) $P(\{a < \mathsf{X} \le b\}) = F_{\mathsf{X}}(b) - F_{\mathsf{X}}(a)$

v) $P(\{\mathsf{X} > c\}) = 1 - F_{\mathsf{X}}(c)$

vi) $P(\mathsf{X} = x) = \begin{cases} p_{\mathsf{X}}(x) & \mathsf{X} \text{ ist reell und diskret} \\ 0 & \mathsf{X} \text{ ist stetig} \end{cases}$

3.2.4 Diskrete kumulative Verteilungsfunktion (KMF)

$$F_{\mathsf{X}}(x) = \sum_{\xi \in \Omega' : \xi \le x} p_{\mathsf{X}}(\xi)$$

3.3 Mehrdimensionale Verteilungen

3.3.1 Gemeinsame Kumulative Verteilungsfunktion

$$F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{\vec{\mathsf{X}}}(\vec{x}) = P(\{\vec{\mathsf{X}} \le \vec{x}\}) \triangleq P(\{\mathsf{X}_1 \le x_1, \dots, \mathsf{X}_n \le x_n\})$$

Eigenschaften:

i) $F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}$ ist in jeder Koordinate monoton wachsend.

ii) $F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}$ ist im folgenden Sinn rechtsseitig stetig: $\forall\ h > 0$ gilt $\lim_{h\to 0} F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1+h,\dots,x_n+h) = F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n),\ \forall\ (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$

iii) Für jedes $1 \le u \le n$ gilt:
$\lim_{x_i\to-\infty} F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = 0$
$\lim_{x_i\to\infty} F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = 1$

3.3.2 Verbund-Zähldichte

$$p_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = p_{\vec{\mathsf{X}}}(\vec{x}) = P(\{\vec{\mathsf{X}} = \vec{x}\}) \triangleq P(\{\mathsf{X}_1 = x_1, \dots, \mathsf{X}_n = x_n\})$$

3.3.3 Verbund-Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = \frac{\partial^n F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

3.3.4 Stetige kumulative Verteilungsfunktion

$$F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(\xi_1,\dots,\xi_n) \mathsf{d}\xi_n \dots \mathsf{d}\xi_1$$

3.3.5 Marginalisierung / Randverteilungen

Für $m < n$ gilt:

$$F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_m}(x_1,\dots,x_m) = F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_m,\infty,\dots,\infty)$$

Es gilt:

a) Eine durch Marginalisierung auf eine einzige Zufallsvariable entstehende KVF heißt **Randverteilung**:

$$F_{\mathsf{X}_1}(x_1) = F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\infty,\dots,\infty)$$

b) **Zähldichte** p_{X_1}

$$p_{\mathsf{X}_1}(x_1) = \sum_{x_2,\dots,x_n} p_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n)$$

c) **Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion** f_{X_1}

$$f_{\mathsf{X}_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) \mathsf{d}x_n \dots \mathsf{d}x_2$$

3.4 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

$\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n$ reelle Zufallsvariablen sind genau dann **stochastisch unabhängig** wenn für jedes $\vec{x} = [x_1,\dots,x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$P(\{\mathsf{X}_1 \le x_1,\dots,\mathsf{X}_n \le x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} P(\{\mathsf{X}_i \le x_i\})$$

Analog folgt die stochastische Unabhängigkeit

a) für reelle Zufallsvariablen aus

$$F_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_{\mathsf{X}_i}(x_i)$$

b) für reelle und diskrete Zufallsvariablen aus

$$p_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{\mathsf{X}_i}(x_i)$$

c) für reelle und stetige Zufallsvariablen aus

$$f_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathsf{X}_i}(x_i)$$

3.5 Bedingte Zufallsvariablen

3.5.1 Bedingte kumulative Verteilungsfunktion

$$F_{\mathsf{X}|A}(x \mid A) = P_A(\{\mathsf{X} \le x\}) = P(\{\mathsf{X} \le x\} \mid A)$$

3.5.2 Bedingte Zähldichte

$$p_{\mathsf{X}|\mathsf{Y}}(x \mid y) = \frac{p_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(x,y)}{p_{\mathsf{Y}}(y)}$$

3.5.3 Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{\mathsf{X}|\mathsf{Y}}(x \mid y) = \frac{\mathsf{d}F_{\mathsf{X}|\mathsf{Y}}(x \mid y)}{\mathsf{d}x} = \frac{f_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(x,y)}{f_{\mathsf{Y}}(y)}$$

4 Funktionen von Zufallsvariablen

4.1 Transformation von Zufallsvariablen (univariater Fall)

Für eine beliebig differenzierbare Funktion g gilt:

$$f_{\mathsf{Y}}(y) = \sum_{i=1}^{N} f_{\mathsf{X}}(x_i) \left[\left| \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \right|_{x=x_i} \right]^{-1}$$

$$f_{\mathsf{Y}}(y) = \sum_{i=1}^{N} f_{\mathsf{X}}(x_i) \left| \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}y} \right|$$

mit streng monotonen x_i:

$$x_i = g_i^{-1}(y)$$

Beispiel:
$Y = aX + b$ ($g(x) = ax + b$) mit $a \in \mathbb{R}\backslash 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

4.2 Summe unabhängiger Zufallsvariablen

Sei $\mathsf{Z} = \mathsf{X} + \mathsf{Y}$ (X und Y stoch. unabhängig), dann gilt

$$f_{\mathsf{Z}=\mathsf{X}+\mathsf{Y}}(z) = (f_{\mathsf{X}} * f_{\mathsf{Y}})(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathsf{X}}(z-y) f_{\mathsf{Y}}(y) dy$$

5 Stochastische Standardmodelle

5.1 Diskrete Verteilungen

5.1.1 *Diskrete Gleichverteilung*

$$p_{\mathsf{X}}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}, \omega \in \Omega$$

5.1.2 *Bernoulli-Verteilung*

$$p_{\mathsf{X}}(k) = \begin{cases} p & \text{wenn } k = 1 \\ 1-p & \text{wenn } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $0 \leq p \leq 1$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = p$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = p(1-p)$
Wahrscheinlichkeitserz. F.:	$G_{\mathsf{X}}(z) = pz + 1 - p$

5.1.3 *Binomialverteilung*

$$p_{\mathsf{X}}(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

mit $n \in \mathbb{N}$; $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$; $0 \leq p \leq 1$
und $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = np$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = np(1-p)$
Wahrscheinlichkeitserz. F.:	$G_{\mathsf{X}}(z) = (pz + 1 - p)^n$

5.1.4 *Poisson-Verteilung*

$$p_{\mathsf{X}}(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

mit $\lambda \geq 0$; $k \in \mathbb{N}_0$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \lambda$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \lambda$
Wahrscheinlichkeitserz. Funktion:	$G_{\mathsf{X}}(z) = \mathrm{e}^{\lambda(z-1)}$

Ergibt sich als asymptotischer Grenzfall aus der Binomialverteilung, wenn $n \to \infty$ und $p \to 0$, sodass $\lambda = np$:

$$p_{\mathsf{X}}(k) = \lim_{n\to\infty} B_{n, \frac{\lambda}{n}}(k)$$

5.1.5 *Geometrische Verteilung*

$$p_{\mathsf{X}}(k) = (1-p)^{k-1} p$$

mit $0 < p \leq 1$; $k \in \mathbb{N}$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \frac{1}{p}$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \frac{1-p}{p^2}$
Wahrscheinlichkeitserz. Funktion:	$G_{\mathsf{X}}(z) = \frac{pz}{1-z+pz}$

Eine geometrisch verteilte ZV X ist **gedächtnislos**:

$$P(\{\mathsf{X} > n+k\} \mid \{\mathsf{X} > n\}) = P(\{\mathsf{X} > k\}),\ n, k \in \mathbb{N}_0$$

5.2 Stetige Verteilungen

5.2.1 *Gleichverteilung*

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $-\infty < a < b < \infty$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \frac{a+b}{2}$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \frac{(b-a)^2}{12}$
Charakterist. Funktion:	$\varphi_{\mathsf{X}}(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega b} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega a}}{\mathrm{j}\omega(b-a)}$

5.2.2 *Exponentialverteilung*

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$$

mit $\lambda > 0$; $x \geq 0$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \frac{1}{\lambda}$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \frac{1}{\lambda^2}$
Charakterist. Funktion:	$\varphi_{\mathsf{X}}(\omega) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{j}\omega}$

Eine exponentialverteilte ZV X ist **gedächtnislos**:

$$P(\{\mathsf{X} > x+\xi\} \mid \{\mathsf{X} > \xi\}) = P(\{\mathsf{X} > x\}),\ x, \xi \geq 0$$

5.2.3 *Normalverteilung*

$$f_{\mathsf{X}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit $\mu \in \mathbb{R}$; $\sigma > 0$

Erwartungswert:	$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \mu$
Varianz:	$\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \sigma^2$
Charakterist. Funktion:	$\varphi_{\mathsf{X}}(\omega) = e^{(\mathrm{j}\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2})}$

Für eine normalverteilte ZV X schreibt man auch

$$\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Für den Spezialfall $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(0,1)$ spricht man von **Standardnormalverteilung**:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Es gilt außerdem:

i) $\mathsf{Y} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \mathsf{X} = \frac{1}{\sigma}(\mathsf{Y} - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$

ii) $\mathsf{X} \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \mathsf{Y} = \sigma \mathsf{X} + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Für $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ und $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, dann gilt für $Z = X + Y$:

$$Z \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$$

5.2.4 Multivariate Normalverteilung

$$f_{\mathsf{X}_1,\ldots,\mathsf{X}_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n \sqrt{\det(\mathbf{C})}} e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \mathbf{C}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}$$

wobei $\vec{\mu}$ den Erwartungswertvektor

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mathsf{E}\begin{bmatrix} \mathsf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{X}_n \end{bmatrix} = \mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}]$$

und $\mathbf{C}$ die Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C} = \mathsf{E}[(\vec{\mathsf{X}} - \vec{\mu})(\vec{\mathsf{X}} - \vec{\mu})^T] = \mathbf{C}^T$$

bezeichnet.
Analog zum univariaten Fall schreibt man auch

$$\vec{\mathsf{X}} \sim \mathcal{N}(\vec{\mu}, \mathbf{C})$$

Für n paarweise unkorrelierte und gemeinsam normalverteilte Zufallsvariablen $X_1, ..., X_2$ gilt:

$$C = diag[\sigma_1^2, ..., \sigma_2^2]$$

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$$

$\Rightarrow X_1, ..., X_2$ sind stochastisch unabhängig!

6 Erwartungswert und Varianz

6.1 Erwartungswert diskreter reeller ZV

$$\mu_{\mathsf{X}} = \mathsf{E}[\mathsf{X}] = \sum_{x \in \Omega'} x P(\{\mathsf{X} = x\}) = \sum_{x \in \Omega'} x p_{\mathsf{X}}(x)$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Fkt. dann gilt für $\mathsf{Y} = g(\mathsf{X})$

$$\mathsf{E}[g(\mathsf{X})] = \sum_{x \in \Omega'} g(x) p_{\mathsf{X}}(x)$$

6.2 Erwartungswert stetiger Zufallsvariablen

$$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathsf{X}}(x) \mathsf{d}x$$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Fkt. dann gilt für $\mathsf{Y} = f(\mathsf{X})$

$$\mathsf{E}[g(\mathsf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\mathsf{X}}(x) \mathsf{d}x$$

6.3 Eigenschaften des Erwartungswerts

Seien X, Y reelle Zufallsvariablen, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) $\mathsf{E}[\alpha \mathsf{X} + \beta \mathsf{Y}] = \alpha \mathsf{E}[\mathsf{X}] + \beta \mathsf{E}[\mathsf{Y}]$

ii) $\mathsf{X} \leq \mathsf{Y} \Rightarrow \mathsf{E}[\mathsf{X}] \leq \mathsf{E}[\mathsf{Y}]$

iii) X, Y stoch. unabhängig $\Rightarrow \mathsf{E}[\mathsf{XY}] = \mathsf{E}[\mathsf{X}]\mathsf{E}[\mathsf{Y}]$
$E[XY]$ heißt **Korrelation** von X, Y

iv) Falls $\mathsf{X} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ (nur nichtnegative Werte):

$$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \int_0^{\infty} P(\mathsf{X} > t)\mathsf{d}t = \int_0^{\infty} (1 - F_{\mathsf{X}}(t))dt$$

$$\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathsf{X} > k)$$

6.4 Varianz und Kovarianz reeller Zufallsvariablen

$$\sigma_{\mathsf{X}}^2 = \mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \mathsf{E}\left[(\mathsf{X} - \mathsf{E}[\mathsf{X}])^2\right] = \mathsf{E}[\mathsf{X}^2] - \mathsf{E}[\mathsf{X}]^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] = \mathrm{Cov}[\mathsf{Y}, \mathsf{X}] &= \mathsf{E}\left[(\mathsf{X} - \mathsf{E}[\mathsf{X}])(\mathsf{Y} - \mathsf{E}[\mathsf{Y}])\right] \\ &= \mathsf{E}[\mathsf{XY}] - \mathsf{E}[\mathsf{X}]\mathsf{E}[\mathsf{Y}]\end{aligned}$$

6.5 Eigenschaften von Varianz und Kovarianz

Seien X, Y, U, V reelle Zufallsvariablen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

i) $\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{X}]$

ii) $\mathrm{Cov}[\alpha \mathsf{X} + \beta, \gamma \mathsf{Y} + \delta] = \alpha\gamma \mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]$

iii) $\mathrm{Cov}[\mathsf{X} + \mathsf{U}, \mathsf{Y} + \mathsf{V}]$
$= \mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] + \mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{V}] + \mathrm{Cov}[\mathsf{U}, \mathsf{Y}] + \mathrm{Cov}[\mathsf{U}, \mathsf{V}]$

iv) $\mathsf{Var}[\alpha \mathsf{X} + \beta] = \alpha^2 \mathsf{Var}[\mathsf{X}]$

v) $\mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] + \sum_{i=1}^{n} \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}[\mathsf{X}_i, \mathsf{X}_j]$

vi) X und Y heißen **unkorreliert**, wenn
$\mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[\mathsf{XY}] = \mathsf{E}[\mathsf{X}]\mathsf{E}[\mathsf{Y}]$

vii) X, Y sind **orthogonal** $\Leftrightarrow \mathsf{E}[\mathsf{XY}] = 0$

viii) Sind $\mathsf{X}_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ paarweise unkorreliert, so gilt
$\mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathsf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}[\mathsf{X}_i]$

ix) Sind $\mathsf{E}[\mathsf{X}^2] < \infty$, $\mathsf{E}[\mathsf{Y}^2] < \infty$, dann heißt

$$\rho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} = \frac{\mathrm{Cov}[\mathsf{X}, \mathsf{Y}]}{\sqrt{\mathsf{Var}[\mathsf{X}]\mathsf{Var}[\mathsf{Y}]}} = \frac{c_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}}{\sigma_{\mathsf{X}}\sigma_{\mathsf{Y}}}$$

Korrelationskoeffizient von X und Y.

$$\text{Es gilt: } \begin{cases} \text{negativ korreliert} & \rho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} \in [-1, 0) \\ \text{unkorreliert} & \rho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} = 0 \\ \text{positiv korreliert} & \rho_{\mathsf{X},\mathsf{Y}} \in (0, 1] \end{cases}$$

6.6 Lineare Regression

Ziel: Approximation von Y durch $\hat{Y} = \alpha X + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
Fehler: $\epsilon = \hat{Y} - Y$
Optimierungsproblem:

$$\min_{\alpha,\beta} E[\epsilon^2] = \min_{\alpha,\beta} E\left[\left(\hat{Y} - Y\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E[\epsilon^2]}{\partial \alpha} = 2(-E[XY] + \alpha E[X^2] + \beta E[X]) \stackrel{!}{=} 0$$
$$\frac{\partial E[\epsilon^2]}{\partial \beta} = 2(-E[Y] + \alpha E[X] + \beta) \stackrel{!}{=} 0$$

Lösung: $\alpha = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$; $\quad \beta = E[Y] - \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}E[X]$

$$\Rightarrow \hat{Y} = \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - E[X]) + E[Y]$$

6.7 Multivariate reelle Zufallsvariablen

6.7.1 Erwartungswertvektor

$$\mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}] = \mathsf{E}\begin{bmatrix}\mathsf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathsf{X}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathsf{E}[\mathsf{X}_1] \\ \vdots \\ \mathsf{E}[\mathsf{X}_n]\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

6.7.2 Kovarianzmatrix

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[\vec{\mathsf{X}}, \vec{\mathsf{Y}}] &= \mathsf{E}[(\vec{\mathsf{X}} - \mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}])(\vec{\mathsf{y}} - \mathsf{E}[\vec{\mathsf{Y}}])^T] \\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{Cov}[\mathsf{X}_1, \mathsf{Y}_1] & \dots & \mathrm{Cov}[\mathsf{X}_1, \mathsf{Y}_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Cov}[\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_1] & \dots & \mathrm{Cov}[\mathsf{X}_n, \mathsf{Y}_m]\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}\end{aligned}$$

6.7.3 Korrelationsmatrix

$$\mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}\vec{\mathsf{Y}}^T] = \begin{bmatrix}\mathsf{E}[\mathsf{X}_1\mathsf{Y}_1] & \dots & \mathsf{E}[\mathsf{X}_1\mathsf{Y}_m] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{E}[\mathsf{X}_n\mathsf{Y}_1] & \dots & \mathsf{E}[\mathsf{X}_n\mathsf{Y}_m]\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

i) $\vec{\mathsf{X}}$ und $\vec{\mathsf{Y}}$ heißen **unkorreliert**, wenn gilt $\mathrm{Cov}[\vec{\mathsf{X}}, \vec{\mathsf{Y}}] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}\vec{\mathsf{Y}}^T] = \mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}]\mathsf{E}[\vec{\mathsf{Y}}]^T$

ii) $\vec{\mathsf{X}}$ und $\vec{\mathsf{Y}}$ heißen **orthogonal**, wenn gilt $\mathsf{E}[\vec{\mathsf{X}}\vec{\mathsf{Y}}^T] = 0$

7 Erzeugende und charakt. Funktionen

7.1 Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

$\mathsf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{N}_0$ diskrete, nichtnegative ZV:

$$G_{\mathsf{X}}(z) = \mathsf{E}[z^{\mathsf{X}}] = \sum_{k=0}^{\infty} p_{\mathsf{X}}(k)z^k, \quad |z| \le 1$$

7.1.1 Eigenschaften

i) $P(\{\mathsf{X} = n\}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}z^n}G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=0}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

ii) $\mathsf{E}[\mathsf{X}] = \left[\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z}G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=1}$

iii) $\mathsf{Var}[\mathsf{X}] = \left[\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}z^2}G_{\mathsf{X}}(z)\right]_{z=1} - \mathsf{E}[\mathsf{X}]^2 + \mathsf{E}[\mathsf{X}]$

$\mathsf{X}_i : \Omega \mapsto \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ **stochastisch unabhängige** diskrete nichtnegative ZV und $\mathsf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i$:

$$G_{\mathsf{Z}}(z) = \prod_{i=1}^n G_{\mathsf{X}_i}(z)$$

7.2 Momenterzeugende Funktionen

$$M_{\mathsf{X}}(s) = \mathsf{E}[e^{s\mathsf{X}}]; \quad \{s \in \mathbb{R} \mid \mathsf{E}[e^{s\mathsf{X}}] < \infty\}$$
$$M_{\mathsf{X}}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^k}{k!}\mathsf{E}[\mathsf{X}^k]; \quad s \in (-a, a)$$

7.2.1 Eigenschaften

i) $\mathsf{E}[\mathsf{X}^n] = \left[\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}s^n}M_{\mathsf{X}}(s)\right]_{s=0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\mathsf{X}_i : \Omega \mapsto \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ **stochastisch unabhängige** reelle ZV und $\mathsf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i$:

$$M_{\mathsf{Z}}(s) = \prod_{i=1}^n M_{\mathsf{X}_i}(s)$$

7.3 Charakteristische Funktion

$$\varphi_{\mathsf{X}}(\omega) = \mathsf{E}[\mathsf{e}^{\mathsf{j}\omega\mathsf{X}}] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathsf{e}^{\mathsf{j}\omega x}f_{\mathsf{X}}(x)\mathsf{d}x$$

7.3.1 Eigenschaften

i) $\mathsf{E}[\mathsf{X}^n] = \frac{1}{\mathsf{j}^n}\left[\frac{\mathsf{d}^n}{\mathsf{d}\omega^n}\varphi_{\mathsf{X}}(\omega)\right]_{\omega=0} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\mathsf{X}_i : \Omega \mapsto \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ **stochastisch unabhängige** reelle ZV und $\mathsf{Z} = \sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i$:

$$\varphi_{\mathsf{Z}}(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_{\mathsf{X}_i}(\omega)$$

7.4 Der zentrale Grenzwertsatz

X_i, $i \in 1, \dots, n$ stoch. unabh. und identisch verteilte reelle ZV, $\mathsf{E}[\mathsf{X}_i] = \mu$, $\mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] = \sigma^2 < \infty$, $\mathsf{E}[\mathsf{Z}_n] = 0$, $\mathsf{Var}[\mathsf{Z}_n] = 1$.

$$\mathsf{Z}_n = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathsf{X}_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\{\mathsf{Z}_n \le z\}) = \Phi(z) \text{ (Standard-NV)}$$

Teil II Stochastische Prozesse

8 Reelle Zufallsfolgen

8.1 Verteilungen und Momente von Zufallsfolgen

Reelle Zufallsfolge $(\mathsf{X}_i : i \in \mathbb{N})$ als Folge reeller Zufallsvariablen eindeutig beschrieben durch Menge aller gemeinsamen kumulativen Verteilungsfunktionen

$$F_{\mathsf{X}_{i1},\dots,\mathsf{X}_{in}}(x_{i1}, \dots, x_{in}) = P(\{\mathsf{X}_{i1} \le x_{i1}, \dots, \mathsf{X}_{in} \le x_{in}\})$$

Für den **Erwartungswert** und die **Varianz** des n-ten Elements gilt:

$$\mu_\mathsf{X}(n) = \mathsf{E}[\mathsf{X}_n]$$
$$\sigma^2_\mathsf{X}(n) = \mathsf{Var}[\mathsf{X}_n] = \mathsf{E}[\mathsf{X}_n^2] - \mathsf{E}[\mathsf{X}_n]^2$$

Autokorrelationsfolge:

$$r_\mathsf{X}(k,l) = \mathsf{E}[\mathsf{X}_k\mathsf{X}_l] = r_\mathsf{X}(l,k)$$

Autokovarianzfolge:

$$c_\mathsf{X}(k,l) = \operatorname{cov}[\mathsf{X}_k,\mathsf{X}_l] = r_\mathsf{X}(k,l) - \mu_\mathsf{X}(k)\mu_\mathsf{X}(l)$$

8.2 Random Walk

Mathematische Modellierung des Vorgangs, dass Teilchen bei jedem Schritt (Schrittweite δ) mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1-p$ Schritt nach rechts oder links macht.

$$\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i \text{ mit } P(\{\mathsf{X}_i = +\delta\}) = p, P(\{\mathsf{X}_i = -\delta\}) = 1-p$$

Dann gilt

$$\mathsf{E}[\mathsf{X}_i] = \delta p - \delta(1-p) = (2p-1)\delta$$
$$\mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] = \mathsf{E}[\mathsf{X}_i^2] - \mathsf{E}[\mathsf{X}_i]^2 = 4p(1-p)\delta^2$$
$$\mathsf{E}[\mathsf{S}_n] = \mathsf{E}\left[\sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{E}[\mathsf{X}_i] = n(2p-1)\delta$$
$$\mathsf{Var}[\mathsf{S}_n] = \mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] = 4np(1-p)\delta^2$$

8.3 Stationarität von Zufallsfolgen

8.3.1 Stationarität

Folgenelemente sind invariant gegenüber Verschiebung der Indizes:

$$F_{\mathsf{X}_{i_1},\dots,\mathsf{X}_{i_n}}(x_1,\dots,x_n) = F_{\mathsf{X}_{i_1+k},\dots,\mathsf{X}_{i_n+k}}(x_1,\dots,x_n)$$

8.3.2 Stationarität im weiteren Sinne (WSS)

$$\mu_\mathsf{X}(i) = \mu_\mathsf{X}(i+k); \quad \forall i,k \in \mathbb{N}$$
$$r_\mathsf{X}(i_1,i_2) = r_\mathsf{X}(\underbrace{i_1-i_2}_{\tau}) = r_\mathsf{X}(i_1+k,i_2+k); \quad \forall i_1,i_2,k \in \mathbb{N}$$

Jede stationäre Folge ist auch im weiteren Sinne stationär, die Umkehrung gilt nicht!

8.4 Konvergenz reeller Zufallsfolgen

Konzepte von Konvergenz (in absteigender Stärke):

i) $\mathsf{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathsf{X}$ (**a**lmost **s**urely):

$$P(\{\omega : \lim_{n\to\infty} \mathsf{X}_n(\omega) = \mathsf{X}(\omega)\}) = 1$$

ii) $\mathsf{X}_n \overset{\text{p.}}{\to} \mathsf{X}$ (in **p**robability):

$$\lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |\mathsf{X}_n(\omega) - \mathsf{X}(\omega)| > \epsilon\}) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

iii) $\mathsf{X}_n \overset{\text{m.s.}}{\to} \mathsf{X}$ (in the **m**ean **s**quare sense):

$$\mathsf{E}[\mathsf{X}_n^2] < \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[(\mathsf{X}_n(\omega) - \mathsf{X}(\omega))^2] = 0$$

iv) $\mathsf{X}_n \overset{\text{d.}}{\to} \mathsf{X}$ (in **d**istribution):

$$\lim_{n\to\infty} F_{\mathsf{X}_n}(x) = F_\mathsf{X}(x)$$

Nützliche Folgerungen:

a) $\mathsf{X}_n \overset{\text{a.s.}}{\to} \mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{X}_n \overset{\text{p.}}{\to} \mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{X}_n \overset{\text{d.}}{\to} \mathsf{X}$

b) $\mathsf{X}_n \overset{\text{m.s.}}{\to} \mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{X}_n \overset{\text{p.}}{\to} \mathsf{X} \Rightarrow \mathsf{X}_n \overset{\text{d.}}{\to} \mathsf{X}$

c) $P(\{\mathsf{X}_n \le \mathsf{Y}\}) = 1\, \forall n, \mathsf{E}[\mathsf{Y}^2] < \infty, \mathsf{X}_n \overset{\text{p.}}{\to} \mathsf{X}$
$\Rightarrow \mathsf{X}_n \overset{\text{m.s.}}{\to} \mathsf{X}$

d) $\mathsf{X}_n \overset{\text{a.s./p./m.s.}}{\to} \mathsf{X}$ und $\mathsf{X}_n \overset{\text{a.s./p./m.s.}}{\to} \mathsf{Y}$
$\Rightarrow P(\{\mathsf{X} = \mathsf{Y}\}) = 1$

e) $\mathsf{X}_n \overset{\text{d.}}{\to} \mathsf{X}$ und $\mathsf{X}_n \overset{\text{d.}}{\to} \mathsf{Y}$
$\Rightarrow \mathsf{X}$ und Y haben gleiche Verteilung.

8.5 Markow- und Tschebyschow-Ungleichung

8.5.1 Markow-Ungleichung

$\mathsf{E}[|\mathsf{X}|] < \infty, a > 0$:

$$P(\{|\mathsf{X}| \ge a\}) \le \frac{\mathsf{E}[|\mathsf{X}|]}{a}$$

8.5.2 Tschebyschow-Ungleichung

$\mathsf{Var}[|\mathsf{X}|] < \infty, a > 0$:

$$P(\{|\mathsf{X} - \mathsf{E}[\mathsf{X}]| \ge a\}) \le \frac{\mathsf{Var}[\mathsf{X}]}{a^2}$$

8.6 Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Sei $(\mathsf{X}_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathsf{X}_i - \mathsf{E}[\mathsf{X}_i]) \overset{\text{p.}}{\to} 0$$

Für stochastisch unabhängige und identisch verteilte Folgenelemente mit $\mathsf{E}[\mathsf{X}_i] = \mathsf{E}[\mathsf{X}]$ und $\mathsf{Var}[\mathsf{X}_i] = \mathsf{Var}[\mathsf{X}] < \infty$ gilt insbesondere:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathsf{X}_i \overset{\text{p.}}{\to} \mathsf{E}[\mathsf{X}]$$

8.7 Das starke Gesetz der großen Zahlen

Sei $(\mathsf{X}_i : i \in \mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (\mathsf{X}_i - \mathsf{E}[\mathsf{X}_i]) \overset{\text{a.s.}}{\to} 0$$

9 Markowketten und bedingte Unabhängigkeit

9.1 Bedingte Unabhängigkeit

A und C heißen bedingt unabhängig gegeben B, wenn gilt:

$$P(A \cap C \mid B) = P(A \mid B)P(C \mid B)$$

bzw.

$$P(A \mid B \cap C) = P(A \mid B)$$

Außerdem gilt dann:

$$\begin{aligned} \text{diskret:} \quad & p_{\mathsf{Z}|\mathsf{Y},\mathsf{X}}(z \mid y, x) = p_{\mathsf{Z}|\mathsf{Y}}(z \mid y) \\ \text{stetig:} \quad & f_{\mathsf{Z}|\mathsf{Y},\mathsf{X}}(z \mid y, x) = f_{\mathsf{Z}|\mathsf{Y}}(z \mid y) \end{aligned}$$

Die Kurzschreibweise hierfür lautet: $\mathsf{X} \to \mathsf{Y} \to \mathsf{Z}$

9.2 Markowketten

Eine Zufallsfolge $(\mathsf{X}_n : n \in \mathbb{N})$ heißt **Markowkette**, falls $\forall\ n_i \in \mathbb{N}, i \in 1, \dots k$ mit $n_1 < \dots < n_k$ gilt:

$$(\mathsf{X}_{\mathsf{n}_1}, \mathsf{X}_{\mathsf{n}_2}, \dots \mathsf{X}_{\mathsf{n}_{\mathsf{k}-2}}) \to \mathsf{X}_{\mathsf{n}_{\mathsf{k}-1}} \to \mathsf{X}_{\mathsf{n}_\mathsf{k}}$$

Dies entspricht der Eigenschaft

$$\begin{aligned} & p_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}},\mathsf{X}_{n_{k-2}},\dots,\mathsf{X}_{n_1}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) \\ =& p_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}}) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} & f_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}},\mathsf{X}_{n_{k-2}},\dots,\mathsf{X}_{n_1}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) \\ =& f_{\mathsf{X}_{n_k}|\mathsf{X}_{n_{k-1}}}(x_{n_k}|x_{n_{k-1}}) \end{aligned}$$

9.2.1 *Zustandsübergänge*

Zustandsübergangswahrscheinlichkeit:

$$p_{\mathsf{X}_n|\mathsf{X}_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

$$p_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1, \dots, x_n) = p_{\mathsf{X}_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} p_{\mathsf{X}_i|\mathsf{X}_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

Zustandsübergangsdichte:

$$f_{\mathsf{X}_n|\mathsf{X}_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$$

$$f_{\mathsf{X}_1,\dots,\mathsf{X}_n}(x_1, \dots, x_n) = f_{\mathsf{X}_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{\mathsf{X}_i|\mathsf{X}_{i-1}}(x_i|x_{i-1})$$

Eine Markowkette heißt **homogen**, wenn gilt:

$$\begin{aligned} p_{\mathsf{X}_{n+1}|\mathsf{X}_n}(x_{n+1} \mid x_n) &= p_{\mathsf{X}_{n+1+k}|\mathsf{X}_{n+k}}(x_{n+1} \mid x_n) \quad n \in \mathbb{N}, n+k \in \mathbb{N} \\ f_{\mathsf{X}_{n+1}|\mathsf{X}_n}(x_{n+1} \mid x_n) &= f_{\mathsf{X}_{n+1+k}|\mathsf{X}_{n+k}}(x_{n+1} \mid x_n) \quad n \in \mathbb{N}, n+k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Kompakte Schreibweise für homogene Markowketten:

$$p_{ij} \triangleq p_{\mathsf{X}_{n+1}|\mathsf{X}_n}(\xi_i \mid \xi_j) \quad n \in \mathbb{N},\ \xi_i, \xi_j \in \mathbb{X}$$

9.2.2 *Chapman-Kolmogorow-Gleichung*

m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit/-dichte:

$$\begin{aligned} & p_{\mathsf{X}_{n+m}|\mathsf{X}_n}(x_{n+m} \mid x_n) \\ & f_{\mathsf{X}_{n+m}|\mathsf{X}_n}(x_{n+m} \mid x_n) \end{aligned}$$

Eine 2-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit wird wie folgt berechnet:

$$p_{\mathsf{X}_{n+2}|\mathsf{X}_n}(x_{n+2}|x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{\mathsf{X}_{n+2}|\mathsf{X}_{n+1}}(x_{n+2}|\xi) p_{\mathsf{X}_{n+1}|\mathsf{X}_n}(\xi|x_n)$$

Für den Fall von homogenen Markowketten mit endlichem Zustandsraum gilt:

$$\overrightarrow{p}_{n+m} = \mathbf{\Pi}^m \overrightarrow{p}_n$$

9.2.3 *Markowketten mit endlichem Zustandsraum*

$$\vec{p}_n \triangleq \begin{bmatrix} p_{\mathsf{X}_n}(x_1) \\ p_{\mathsf{X}_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{\mathsf{X}_n}(x_N) \end{bmatrix} \in [0,1]^N \text{ mit } [\vec{p}_n]_i = p_{\mathsf{X}_n}(x_i)$$

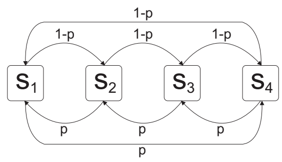
Übergangsmatrix:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{bmatrix} \in [0,1]^{N \times N}$$

Spaltensumme muss immer 1 ergeben!

$$\begin{aligned} \vec{p}_{n+1} &= \mathbf{\Pi} \vec{p}_n \quad n \in \mathbb{N} \\ \vec{p}_{n+m} &= \mathbf{\Pi}^m \vec{p}_n \quad n, m \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Übergangsgraph: (Random Walk auf einem Kreis)



Eine Verteilung heißt **stationär**, wenn gilt:

$$\overrightarrow{p}_\infty = \mathbf{\Pi} \overrightarrow{p}_\infty$$

10 Zufallsprozesse

Reeller Zufallsprozess: $\mathsf{X}_t : \Omega \mapsto \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ Zufallsfolge ist ein diskreter Zufallsprozess

10.1 Ensemble und Musterfunktion

Möglichkeiten der Interpretation eines Zufallsprozesses:

a) als **Ensemble** einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen X_t mit $t \in \mathbb{R}$
b) **Schar von Musterfunktionen** $\mathsf{X}_t(\omega) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto \mathsf{X}_t(\omega)$ als deterministische Funktion von t mit einem gegebenen Ereignis $\omega \in \Omega$

10.2 Verteilungen und Momente

a) **Erwartungswertfunktion**

$$\mu_{\mathsf{X}}(t) = \mathsf{E}[\mathsf{X}_t]$$

b) **Autokorrelationsfunktion**

$$r_{\mathsf{X}}(s,t) = \mathsf{E}[\mathsf{X}_s \mathsf{X}_t] = r_{\mathsf{X}}(t,s)$$

c) **Autokovarianzfunktion**

$$c_{\mathsf{X}}(s,t) = \operatorname{cov}(\mathsf{X}_s, \mathsf{X}_t) = r_{\mathsf{X}}(s,t) - \mu_{\mathsf{X}}(s)\mu_{\mathsf{X}}(t)$$

10.3 Wiener-Prozess (ist kein Zählprozess!)

Addition/Subtraktion eines zufälligen Wertes je infinitesimalem Zeitintervall.
Der Zufallsprozess $(\mathsf{S}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ mit $\mathsf{S}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ heißt **Wiener-Prozess**.

$$\begin{aligned}
S_n &= [S_t]_{t=nT}; \quad n \to \infty, T \to 0 \\
[\mathsf{E}[\mathsf{S}_t]]_{t=nT} &= \mathsf{E}[\mathsf{S}_n] = 0 \\
[\mathsf{Var}[\mathsf{S}_t]]_{t=nT} &= \mathsf{Var}[\mathsf{S}_n] = n\delta^2 = \left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor \delta^2 = \sigma^2 t \text{ mit } \delta = \sqrt{\sigma^2 T}
\end{aligned}$$

Die Varianz der Normalverteilung ist hier also zeitabhängig:

$$f_{\mathsf{S}_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

10.3.1 Eigenschaften des Wiener-Prozesses

Sei $(\mathsf{W}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ mit $\sigma > 0$ ein Wiener-Prozess, dann gilt:

a) $P(\{\mathsf{W}_0 = 0\}) = 1$ (Wiener-Prozess startet stets im Koordinatenursprung)

b) $(\mathsf{W}_t : t \in \mathbb{R}_+)$ hat unabhängige Inkremente

c) $\mathsf{W}_t - \mathsf{W}_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s))\ \forall 0 \le s \le t$

d) $\mathsf{W}_t(\omega)$ ist stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

e) **Erwartungswertfunktion**

$$\mu_{\mathsf{W}}(t) = \mathsf{E}[\mathsf{W}_t] = \mathsf{E}[\mathsf{W}_t - \mathsf{W}_0] = 0$$

f) **Autokorrelationsfunktion**

$$r_{\mathsf{W}}(s,t) = c_{\mathsf{W}}(s,t) = \sigma^2 \min\{s,t\}$$

10.4 Poisson-Prozess (Zählprozess, $\mathsf{N}_t : t \in \mathbb{R}_+$)

Das Zeitintervall bis zur nächsten Inkrementierung ist immer identisch exponentialverteilt.
Die Inkremente der ZV $\mathsf{X}_t - \mathsf{X}_s$ sind Poisson-verteilt:

$$p_{\mathsf{X}_t - \mathsf{Y}_t}(n) = e^{-\lambda_{\mathsf{X}}(t-s)} \frac{[\lambda_{\mathsf{X}}(t-s)]^n}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Konstruktion

$$\mathsf{N}_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - \mathsf{T}_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^{i} \mathsf{X}_j$$

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$f_{\mathsf{T}_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

Wahrscheinlichkeit, dass bis zum Zeitpunkt t genau n zufällige Inkrementierungen stattgefunden haben:

$$P(\{\mathsf{N}_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}_+$$

10.4.1 Eigenschaften des Poisson-Prozesses

a) **Erwartungswertfunktion**

$$\mu_{\mathsf{N}}(t) = \mathsf{E}[\mathsf{N}_t] = \mathsf{E}[\mathsf{N}_t - \mathsf{N}_0] = \lambda t$$

b) **Autokorrelationsfunktion**

$$r_{\mathsf{N}}(t_1, t_2) = \mathsf{E}[N_{t_1} N_{t_2}] = \lambda \min\{t_1, t_2\} + \lambda^2 t_1 t_2$$

c) **Autokovarianzfolge**

$$\begin{aligned}
c_{\mathsf{N}}(t_1, t_2) &= \operatorname{Cov}[N_{t_1}, N_{t_2}] = r_N(t_1, t_2) - \mu_N(t_1)\mu_N(t_2) \\
&= \lambda \min\{t_1, t_2\}
\end{aligned}$$

d) Musterfunktion des $\sim$ ist Zählfunktion ($f(0) = 0, f$ monoton steigend $\Rightarrow \mathsf{N}_{t2} \ge \mathsf{N}_{t1}$ gilt immer!)

10.5 Klassifikation reeller Zufallsprozesse

Eigenschaften eines einzelnen Zufallsprozesses

i) **Stationarität** eines ZP

$$F_{\mathsf{X}_{t_1}, \ldots, \mathsf{X}_{t_n}}(x_1, \ldots x_n) = F_{\mathsf{X}_{t_1+s}, \ldots, \mathsf{X}_{t_n+s}}(x_1, \ldots x_n)$$
$$\forall \left[x_1, \ldots, x_n\right]^T \in \mathbb{R}^n, \left[t_1, \ldots, t_n\right]^T \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R}$$

ii) **Stationarität im weiteren Sinne (WSS)**

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathsf{X}}(t) &= \mu_{\mathsf{X}}(t+s); \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \\
r_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) &= r_{\mathsf{X}}(t_1 + s, t_2 + s) = r_{\mathsf{X}}(\underbrace{t_1 - t_2}_{\tau}) = r_{\mathsf{X}}(-\tau)
\end{aligned}$$

Stationarität $\Rightarrow$ Stationarität im weiteren Sinne (Umkehrung gilt nicht!).

iii) **Zyklische WSS** Für periodische $\mu_{\mathsf{X}}(t)$ und $r_{\mathsf{X}}(t_1, t_2)$ mit $T > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu_{\mathsf{X}}(t) &= \mu_{\mathsf{X}}(t+T) && \forall t \in \mathbb{R} \\
r_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) &= r_{\mathsf{X}}(t_1 + T, t_2 + T) && \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

aus WSS $\Rightarrow$ zyklische WSS

Eigenschaften von zwei Zufallsprozessen

Seien $(\mathsf{X}_t : t \in \mathbb{R})$ und $(\mathsf{Y}_t : t \in \mathbb{R})$ zwei ZP auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum

i) **Gemeinsame Stationarität**
X_t und Y_t sind zwei reelle jeweils selbst stationäre ZP und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant.

ii) **Kreuzkorrelationsfunktion**

$$r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t) = \mathsf{E}[\mathsf{X}_s \mathsf{Y}_t] = r_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(t,s)$$

iii) **Kreuzkovarianzfunktion**

$$c_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t) = r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t) - \mu_{\mathsf{X}}(s)\mu_{\mathsf{Y}}(t) = c_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(t,s)$$

iv) **Gemeinsame Stationarität im weiteren Sinne**
X_t und Y_t sind zwei reelle jeweils selbst im weiteren Sinne stationäre ZP und es gilt

$$r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(t_1, t_2) = r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(t_1 + s, t_2 + s) \quad \forall t_1, t_2, s \in \mathbb{R}$$

v) **Stochastische Unabhängigkeit**

$$\begin{aligned}&F_{\mathsf{X}_{t_1},...,\mathsf{X}_{t_n},\mathsf{Y}_{t_{n+1}},...,\mathsf{Y}_{t_{n+m}}}(x_1,...,x_n,y_1,...,y_m)\\=&F_{\mathsf{X}_{t_1},...,\mathsf{X}_{t_n}}(x_1,...,x_n)F_{\mathsf{Y}_{t_{n+1}},...,\mathsf{Y}_{t_{n+m}}}(y_1,...,y_m)\end{aligned}$$

vi) **Stochastische Unkorreliertheit**

$$c_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t)=0 \Leftrightarrow r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t)=\mu_\mathsf{X}(s)\mu_\mathsf{Y}(t) \quad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

vii) **Stochastische Orthogonalität**

$$r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(s,t)=0 \quad \forall s,t\in\mathbb{R}$$

10.6 Eigenschaften der Auto- und Kreuzkorrelationsfunktion von gemeinsam WSS Zufallsprozessen

$$\begin{aligned}r_\mathsf{X}(\tau)&\le r_\mathsf{X}(0)\\|r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(\tau)|&\le\sqrt{r_\mathsf{X}(0)r_\mathsf{Y}(0)}\\r_\mathsf{X}(\tau)&=r_\mathsf{X}(-\tau)\ \text{(AKF gerade, achsensymm.)}\\&\mathbf{a}^T\mathbf{R}_\mathsf{X}\mathbf{a}\ge 0\\&[\mathbf{R}_\mathsf{X}]_{k,l}=r_\mathsf{X}(t_k-t_l)\quad\forall t_k,t_l\in\mathbb{R},\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

10.7 Leistungsdichtespektrum reeller WSS Zufallsprozesse

→ existiert nur für WSS Zufallsprozesse!

$$S_\mathsf{X}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} r_\mathsf{X}(\tau)\,\mathrm{e}^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

(Wiener-Chintschin-Theorem)

Eigenschaften

$$\begin{aligned}&S_\mathsf{X}(f)=S_\mathsf{X}^*(f) && \forall f\in\mathbb{R}\\&S_\mathsf{X}(f)=S_\mathsf{X}(-f) && \forall f\in\mathbb{R}\\&\int_{-\infty}^{\infty}S_\mathsf{X}(f)\,df=r_\mathsf{X}(0)=\sigma_\mathsf{X}^2+\mu_\mathsf{X}^2=\mathsf{E}[\mathsf{X}^2]\\&S_\mathsf{X}(f)\ge 0 && \forall f\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

11 Zufallsprozesse und lineare Systeme

11.1 Lineare zeitinvariante Systeme

Beschreibung eines LTI-Systems durch **Impulsantwort**:

$$y(t)=(h*x)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)x(\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

Im Frequenzraum gilt dann folglich:

$$Y(f)=H(f)X(f)$$

11.2 Erwartungswert- und Korrelationsfunktionen

Ausgang eines mit dem Zufallsprozess X_t beaufschlagten linearen Systems ist wieder ein Zufallsprozess:

$$\mathsf{Y}_t=\int_{-\infty}^{\infty}h(t-\tau)\mathsf{X}_\tau\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)\mathsf{X}_{t-\tau}\,dt$$

Bei Filterung eines WSS Zufallsprozesses X_t mit einem LTI-System sind X_t und der gefilterte Zufallsprozess Y_t gemeinsam **WSS**. Dann gilt:

i) **Erwartungswertfunktion**

$$\mu_\mathsf{Y}=\mu_\mathsf{X}\int_{-\infty}^{\infty}h(t)\,dt$$

ii) **Kreuzkorrelationsfunktion**

$$\begin{aligned}r_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(\tau)&=(h*r_{\mathsf{X},\mathsf{X}})(\tau)=(h*r_\mathsf{X})(\tau)\\r_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(\tau)&=(h*r_\mathsf{X})(-\tau)=(\tilde{h}*r_\mathsf{X})(\tau)\end{aligned}$$

iii) **Autokorrelationsfunktion**

$$r_\mathsf{Y}(\tau)=(\tilde{h}*h*r_\mathsf{X})(\tau)\quad\text{mit }\tilde{h}(\tau)=h(-\tau)$$

11.3 Leistungsdichtespektren

Leistungsdichtespektrum ist die Fourier-Transformierte der entsprechenden Korrelationsfunktion, folglich gilt:

$$\begin{aligned}r_\mathsf{Y}(\tau)&\circ\!\!-\!\!\bullet\ S_\mathsf{Y}(f)\\r_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(\tau)&\circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(f)\\r_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(-\tau)&\circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}^*(f)\end{aligned}$$

Leistungsdichtespektrum der

i) **Autokorrelationsfunktion**

$$S_\mathsf{Y}(f)=|H(f)|^2S_\mathsf{X}(f)$$

ii) **Kreuzkorrelationsfunktion**

$$\begin{aligned}S_{\mathsf{Y},\mathsf{X}}(f)&=H(f)S_\mathsf{X}(f)\\S_{\mathsf{X},\mathsf{Y}}(f)&=H^*(f)S_\mathsf{X}(f)\end{aligned}$$

Diese Formelsammlung ist eine überarbeitete und erweiterte Version der "Stochastische Signale Formelsammlung" von Tobias Grabmeier (Originalversion 2011-07-02), Sebastian Krosche (Version 2012-02-09), Johannes Pickart (Version 2013-02-13).