Inhaltsverzeichnis

Teil I
Mathematik 3

1 Integration in mehreren Variablen

1.1 Allgemeine Rechenregel (Linearität)

$$\int_w (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_w f\ ds + \beta \int_w g\ ds$$

1.2 Kurvenintegrale / Wegintegrale

1.2.1 Wegintegral über stetiges Skalarfeld

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $w : I = [a, b] \to D$ eine differenzierbare Kurve und $f : D \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld, dann heißt

$$\int_w f(s) ds = \int_a^b f(w(t)) \underbrace{||w'(t)||dt}_{ds}$$

das **Kurvenintegral** von f entlang von w.

1.2.2 Wegintegral über stetiges Vektorfeld

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ offen, $w : I = [a, b] \to D$ eine differenzierbare Kurve und $v : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, dann heißt

$$\int_w v(x) dx = \int_a^b v(w(t)) \underbrace{\underbrace{T(t)||w'(t)||}_{w'(t)} dt}_{dx}$$

das **Kurvenintegral** von v entlang von w.

mit dem Tangenteneinheitsvektor

$$T(t) = \frac{1}{||w'(t)||} w'(t)$$

1.2.3 Potentialfelder (Gradientenfelder)

Definitionen:

- Eine Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **wegzusammenhängend**, falls es zu je zwei Punkten x, y aus D eine Kurve $w : [a, b] \to D$ mit $w(a) = x$ und $w(b) = y$ gibt.
- Eine wegzusammenhängende Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn jede geschlossene doppelpunktfreie Kurve in D stetig auf einen Punkt in D zusammengezogen werden kann, ohne dass D verlassen wird.
- $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, falls G offen und zusammenhängend ist.
- $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls mit je zwei Punkten $p, q \in G$ auch die Strecke zwischen p und q ganz in G liegt.
- Sei $C \in \mathbb{R}^n$ eine offene und wegzusammenhängende Menge. Ein stetiges Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt **konservativ**, **Potentialfeld** oder **Gradientenfeld**, wenn es ein Skalarfeld $F : D \to \mathbb{R}$ gibt mit

  $$f(x) = \nabla F(x)\ für\ alle\ x \in D$$

  In diesem Fall heißt F **Stammfunktion** und $U = -F$ eine **Potentialfunktion** von f.

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine wegzusammenhängende offene Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- f ist ein Gradientenfeld
- Für alle stetig differenzierbaren Kurven w in D hängt das Kurvenintegral $\int_w f\ dx$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von w ab.
- Für alle geschlossenen stetig differenzierbaren Kurven w in D gilt

  $$\oint_w f\ dx = 0$$

Überprüfung auf Gradientenfeld:
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine offene, einfach zusammenhängende Menge und sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dieses Vektorfeld ist genau dann ein Gradientenfeld, wenn die sogenannte **Integrabilitätsbedingung**

$$J_f(x) = J_f(x)^T\ für\ alle\ x \in D$$

bzw.

$$\partial_{x_i} f_j(x) = \partial_{x_j} f_i(x)\ für\ alle\ 1 \leq i, j \leq n$$

oder

$$rot(f(x)) = 0\ für\ alle\ x \in D\ im\ \mathbb{R}^3$$

erfüllt ist.

Hauptsatz über Kurvenintegrale:
Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ stetiges Gradientenfeld mit Stammfunktion F, dann gilt für jede stückweise reguläre Kurve w:

$$\int_w v\ dx = F(w(b)) - F(w(a))$$

Berechnung einer Stammfunktion (hier im $\mathbb{R}^3$):

Sei $v(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2, x_3) \\ v_2(x_1, x_2, x_3) \\ v_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$ das Gradientenfeld.
Dann berechnet sich die Stammfunktion wie folgt:

1) v_1 nach x_1 integrieren
   $\Rightarrow$ Integrationskostante $C(x_2, x_3)$
2) Das Ergebnis F der Integration partiell nach x_2 ableiten und mit v_2 gleichsetzen $\Rightarrow$ Gleichung für $\partial_{x_2} C(x_2, x_3)$ in der x_1 herausfallen muss.
3) Gleichung $C_{x_2}(x_2, x_3) = ...$ nach x_2 integrieren
   $\Rightarrow C(x_2, x_3) = ... + C(x_3)$
4) Ergebnis in F einsetzen und partiell nach x_3 ableiten...

1.3 Mehrfachintegration über Skalarfeld entlang von Koordinatenlinien

1.3.1 Allgemein

Definitionen:

- $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt kompakt oder **Kompaktum**, falls B abgeschlossen und beschränkt ist.

- Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompaktum. B heißt **messbar**, falls $F = \int_B 1\ dV$ existiert.
- Ein Kompaktum $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, falls $F(B) = 0$
- Kompaktum $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar $\Leftrightarrow$ ∂B ist Nullmenge

Satz:
Jedes $f \in C^1(B)$ auf einem messbaren Kompaktum $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist integrierbar.

Mittelwertsatz:
Sei f integrierbar über einem messbaren Kompaktum $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $m = \inf\limits_{x\in B}(f), M = \sup\limits_{x\in B}(f)$.
Dann gilt

$$m \cdot F(B) \leq \int_B f\ dx \leq M \cdot F(B)$$

Falls B zusammenhängend, dann existiert ein $(x_1, ..., x_n) \in B$, sodass gilt:

$$\int_B f\ dx = f(x_1, ..., x_n) \cdot F(B)$$

1.3.2 Integration über Normalbereich

Der **Normalbereich** B ist wie folgt definiert:

$$B = \{(x_1, x_2, ..., x_n)^T : g_1 \leq x_1 \leq h_1 \wedge g_2(x_1) \leq x_2 \leq h_2(x_1) \\ \wedge ... \wedge g_n(x_1, ..., x_{n-1}) \leq x_n \leq h(x_1, ..., x_{n-1})\}$$

mit $f : B \to \mathbb{R}$ und g, h stetig.

Das Integral von f über B berechnet sich dann wie folgt:

$$\int_B f\ dx = \int_{g_1}^{h_1} \int_{g_2(x_1)}^{h_2(x_1)} ... \int_{g_n(x_1,...,x_{n-1})}^{h_n(x_1,...,x_{n-1})} f(x_1, ..., x_n) dx_n ... dx_1$$

1.3.3 Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^n$

Voraussetzungen:

- G und G^* sind Gebiete im $\mathbb{R}^n$
- $T : G^* \to G$ bijektiv und stetig differenzierbar
- $det(J_T(u)) \neq 0\ \forall u \in G^*$

Es gilt:

$$T(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(u_1, ..., u_n) \\ \vdots \\ g_n(u_1, ..., u_n) \end{pmatrix}$$

Die Funktionalmatrix von $T : G^* \to G$ lautet dann:

$$J_T(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

Die Funktionaldeterminante ist definiert als

$$\frac{\partial(x_1, ..., x_n)}{\partial(u_1, ..., u_n)} = det(J_T)$$

Zylinderkoordinaten:
Mit $0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gilt

$$T(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi) \\ r \cdot sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = r$$

Kugelkoordinaten:
Mit $0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ gilt

$$T(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot cos(\varphi)cos(\theta) \\ r \cdot sin(\varphi)cos(\theta) \\ r \cdot sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 cos(\theta)$$

Elliptische Koordinaten
Mit $0 \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gilt

$$T(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot r \cdot cos(\varphi) \\ b \cdot r \cdot sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = a \cdot b \cdot r$$

Komposition von Transformationen:
Es gilt

$$det(J_S \circ J_T) = det(J_S) \cdot det(J_T)$$

Transformationsformel:
Sei B^* eine messbare kompakte Teilmenge von G^*, dann gilt

$$\int_B f(x)\ dx = \int_{B^*} f(T(u))|det(J_T)|du$$

1.4 Parameterabhängige Integrale

Sei $t \in I \subseteq \mathbb{R}, f : B \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, wobei f für jedes festgehaltene t integrierbar sein muss und sei

$$F(t) = \int_B f(x, t)dx$$

Dann ist auch F in I stetig.
Seien $f \in C^1(B \times I), \frac{\partial f}{\partial t} \in C(B \times I)$, dann ist $F \in C^1$ und es gilt:

$$\frac{dF}{dt} = \int_B \frac{df(x, t)}{dt} dx = \frac{d}{dt} \int_B f(x, t)dx$$

1.4.1 Variable Integrationsgrenzen

Sei $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Bereich, der alle Punkte (x, t) enthält, für die $\varphi(t) \leq x \leq \psi(t)$ gilt, sei $\varphi, \psi \in C^1(I), f \in C^1(B), \frac{\partial f}{\partial t} \in C(B)$ und sei

$$F(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(x, t)dx$$

dann existieren $\frac{\partial F}{\partial t}, \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ und $\frac{\partial F}{\partial \psi}$ und es gilt

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \varphi}}_{-f(\varphi(t),t)} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial \psi}}_{f(\psi(t),t)} \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

Leibniz-Regel:

$$\frac{dF}{dt} = \int\limits_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx - f(\varphi(t),t)\frac{d\varphi}{dt} + f(\psi(t),t)\frac{d\psi}{dt}$$

1.5 Flächenintegrale

1.5.1 Flächenstück

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und messbar, $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3, f \in C^1(\overline{D})$ und gelte $Rang(f') = 2 \; \forall (u,v)^T \in D$.
Dann heißt $f(\overline{D})$ Flächenstück F im $\mathbb{R}^3$.
Sei

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} \partial_u X \\ \partial_u Y \\ \partial_u Z \end{pmatrix} ; \; f_v = \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} \partial_v X \\ \partial_v Y \\ \partial_v Z \end{pmatrix}$$

$$f'(u,v) = J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \partial_u X & \partial_v X \\ \partial_u Y & \partial_v Y \\ \partial_u Z & \partial_v Z \end{pmatrix}$$

Falls $Rang(f') = 2$:

$$\Rightarrow f_u, f_v \; linear \; unabh\ddot{a}ngig \Leftrightarrow f_u \times f_v \neq 0$$

1.5.2 Tangentialebene von F im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$

Die Tangentialebene wird für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wie folgt beschrieben:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + J_f(u_0, v_0) \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda f_u(u_0, v_0) + \mu f_v(u_0, v_0)$$

1.5.3 Tangentialvektor von $\hat{K}$ im Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T$

Sei

$$K : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

und sei

$$\hat{K} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k(t) = f(\gamma(t))$$

Dann wird der Tangentialvektor von $\hat{K}$ an der Stelle $(x_0, y_0, z_0)^T \in F$ wie folgt beschrieben:

$$\dot{x}(t) = J_f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) \in \; Tangentialebene$$

1.5.4 Einheitsnormalenvektor

Für $x_0 = f(u_0, v_0) \in F$ gilt

$$n(x_0) = \frac{f_u(x_0) \times f_v(x_0)}{|f_u(x_0) \times f_v(x_0)|}; \; n \perp \; Tangentialebene$$

1.5.5 Parametertransformationen

Definitionen:

- $\varphi : \overline{D} \to \overline{G}$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn $\varphi \in C^1(\overline{D})$, φ eindeutig umkehrbar (bijektiv) und $\varphi^{-1} \in C^1(\overline{G})$
- Sei F ein Flächenstück. Die Parameterdarstellung $g : \overline{G} \to \mathbb{R}$ von F heißt **äquivalent** zur Parameterdarstellung $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ von F (kurz $g \sim f$), wenn $g = f \circ \varphi$ gilt, wobei φ ein Diffeomorphismus mit $det(\varphi') > 0$ ist.
- Ein Flächenstück heißt **doppelpunktfrei** (injektiv), falls $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ injektiv ist.
  Alle doppelpunktfreien Flächen haben genau 2 Orientierungen.
- Eine **Fläche** ist eine Vereinigung endlich vieler injektiver Flächenstücke, wobei je zwei Flächenstücke höchstens Randpunkte gemeinsam haben.

1.5.6 Flächenintegral

Sei $F : f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ ein injektives Flächenstück. Dann gilt

$$A(F) = \int\int\limits_F dA = \int\int\limits_{\overline{D}} |f_u \times f_v| dudv$$

Grundlegende Eigenschaften:
Seien $F, \hat{F}$ disjunkt, dann gilt

- Additivität: $A(F \cup \hat{F}) = A(F) + A(\hat{F})$
- Monotonie: $F \subseteq \hat{F} \Rightarrow A(F) \leq A(\hat{F})$
- Bewegungsinvarianz:
  Sei β Bewegung (Translation, Rotation, Spiegelung)
  $\Rightarrow A(\beta(F)) = A(F)$
- Normierung: $Q = [0,1] \times [0,1] \times \{0\} : A(Q) = 1$

1.5.7 Flächenintegral 1. Art

Sei $F : f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ ein injektives Flächenstück, $F \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ und sei $G : A \to \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

$$\int\int\limits_F G \; dA = \int\int\limits_{\overline{D}} G(f(u,v))||f_u \times f_v||dudv$$

1.5.8 Flächenintegral 2. Art

Sei $F : f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ ein injektives Flächenstück, $F \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$ und sei $v : A \supseteq F \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann gilt

$$\int\int\limits_F G \; d\sigma = \int\int\limits_{\overline{D}} v(f(u,v)) \underbrace{(f_u \times f_v)dudv}_{d\sigma}$$

$$d\sigma = \underbrace{\frac{f_u \times f_v}{||f_u \times f_v||}}_{n_F} \underbrace{||f_u \times f_v||dudv}_{dA}$$

1.5.9 *Transformationsformel für Flächenintegrale 2. Art*

Sei $F : f : \overline{D} \to \mathbb{R}^3$ ein injektives Flächenstück, $F \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^3$, sei $v : A \supseteq F \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld und sei $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Diffeomorphismus mit

$$F^* : x^* = S(x) = S(f(u,v))$$

dann gilt

$$\int\int_F v \, d\sigma = \int\int_{F^*} v^* \, d\sigma^*$$

mit

$$v^*(x^*) = \frac{J_S(S^{-1}(x^*))}{det(J_S(S^{-1}(x^*)))} \cdot v(S^{-1}(x^*))$$

1.6 Integralsätze

Definition (Bereich):
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ kompakt. B heißt **Bereich** mit **stückweise glattem Rand**, wenn $B = \overline{B}_0$ ($B_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ offen) und $\partial B = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$, wobei F_i Flächenstücke sind.

1.6.1 *Integralsatz von Gauß*

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Bereich mit stückweise glattem Rand und sei $v \in C^1(B)$ ein Vektorfeld, dann gilt

$$\int_{\partial B} v \, d\sigma = \int_B div(v) dV$$

1.6.2 *Integralsatz von Gauß im $\mathbb{R}^2$*

Sei D ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand (stückweise C^1-Kurve) $K : \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T, \gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und sei $v : D \to \mathbb{R}^2$ ein C^1-Vektorfeld, dann berechnet sich der Fluss v <u>durch</u> den Rand wie folgt:

$$\oint_K v^T \cdot n \, ds = \int\int_{\overline{D}} div(v) dF$$

$$\int_a^b v(\gamma(t)) \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\gamma}_2(t) \\ -\dot{\gamma}_1(t) \end{pmatrix}}_{n \underbrace{||\dot{\gamma}(t)|| dt}_{ds}} dt = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) dF$$

Leibnizsche Sektorformel:

$$F(G) = \frac{1}{2} \int_a^b \gamma_1(t)\dot{\gamma_2}(t) - \gamma_2(t)\dot{\gamma_1}(t) dt$$

1.6.3 *Integralsatz von Green im $\mathbb{R}^2$*

Seien die Bedingungen wie zuvor, dann berechnet sich der Fluss v <u>entlang</u> des Randes wie folgt:

$$\oint_K v^T dx = \int\int_{\overline{D}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dF$$

<u>$\mathcal{N.B.}$</u>
Gauß'scher und Green'scher Satz gelten auch für Gebiete $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$

1.7 1. Green'sche Formel

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Kompaktum mit abschnittsweise glattem Rand und seien $\varphi \in C^1(B)$ ein Skalarfeld und $v \in C^1(G)$ ein Vektorfeld, dann gilt

$$\int\int_{\partial B} \varphi \cdot v \, d\sigma = \int_B (\nabla\varphi \cdot v + \varphi \cdot \nabla v) dV$$

1.7.1 *Gauß'scher Satz für Skalarfelder*

Definition:
$B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Gauß'scher Bereich**, wenn für alle $v \in C^1(B)$ der Gauß'sche Integralsatz gilt.

Sei B : Gauß'scher Bereich, $\varphi \in C^1(B)$ ein Skalarfeld, dann gilt

$$\int\int_{\partial B} \varphi \cdot \underbrace{n \cdot dA}_{d\sigma} = \int_B \nabla\varphi dV$$

1.7.2 *Satz von Stokes*

Sei F : stückweise glatt berandet, $v \in C^1(M), F \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^3$, dann gilt

$$\oint_{\partial F} v \, dx = \int\int_F rot(v) d\sigma$$

Folgerung:
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und $B \subseteq M$ ein Gauß'scher Bereich mit stückweise glattem Rand, dann gilt

$$\int\int_{\partial B} rot(v) d\sigma = 0$$

$\mathcal{N.B.}$
Im $\mathbb{R}^2$ gilt: "Green = Gauß = Stokes"

1.8 Vektorpotential

Definition:
$G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn ein $x_0 \in G$ existiert, sodass jeder andere Punkt $x \in G$ sich geradlinig in G mit x_0 verbinden lässt.

Satz:
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ sternförmig und $v \in C^1(G)$, dann gilt:

$$div(v) = 0 \Leftrightarrow \exists \, a \in C^1(G) : v = rot(a)$$

Das Vektorpotential berechnet sich dann wie folgt:

$$a(x) = \int_0^1 t \cdot v(x_0 + t(x - x_0)) \times (x - x_0) dt$$

Alle Vektorpotentiale von v haben die Form

$$a + grad(\varphi)$$

wobei $\varphi \in C^2(G)$ ein beliebiges Skalarfeld ist.

1.9 Helmholtz'scher Zerlegungssatz

Sei G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ und $v \in C^2(G)$, dann existiert ein $\varphi \in C^1(G)$ und ein $a \in C^1(G)$, sodass gilt:

$$v = \nabla\varphi + rot(a)$$

2 Integraltransformationen

2.1 Grundlagen

2.1.1 Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.
Eine Abbildung $(x, y) \in V \times V \to \langle x, y\rangle \in \mathbb{C}$ ist ein Skalarprodukt, falls für alle $x, y, z \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $\langle x, x\rangle > 0\ \forall x \neq 0$ und $\langle 0, 0\rangle = 0$
2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
   $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$
3) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
   $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
4) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Eigenschaften:

1) Skalarprodukt ist Orthogonalitätsmaß

$$x \perp y, \text{ falls } \langle x, y\rangle = 0$$

2) Zugehörige Norm

$$||x|| = ||x||_v = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

3) Seien $v_1, ..., v_m \in V$ orthogonal, d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $i \neq j$, dann gilt

$$||v_1 + ... + v_m||^2 = ||v_1||^2 + ... + ||v_m||^2$$

4) Seien $v_1, ..., v_m \in V$ orthonormal, d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, dann gilt für $\gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathbb{C}$

$$||\gamma_1 v_1 + ... + \gamma_m v_m||^2 = |\gamma_1|^2 + ... + |\gamma_m|^2$$

5) Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||\ \forall x, y \in V$$

2.1.2 Hilbertraum

Definition:
Ein Vektorraum H mit Skalarprodukt, der vollständig (d.h. jede Cauchy-Folge konvergiert in H) ist, heißt **Hilbertraum**.

2.1.3 Orthonormalsystem

Definition:
Sei H ein Hilbertraum.
Ein System $(e_{ij})_{j\in I}$ mit $e_j \in H$ heißt **Orthonormalystem (ONS)**, falls

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in I$$

und **vollständig**, falls

$$x = \sum_{j\in I}\langle x, e_j\rangle e_j \qquad \forall x \in H$$

Lemma:
Sei H: Hilbertraum und $(e_j)j \in I$ ein vollständiges ONS, dann gilt für die **orthogonale Projektion** S_N (Fourier-Summe):

$$S_N = \sum_{|j|\leq N}\langle x, e_j\rangle e_j$$

und

$$(x - S_N) \perp span\{e_j : |j| \leq N\}$$

Somit gilt

$$||x||^2 = ||S_N||^2 + ||x - S_N||^2$$

und insbesondere die Bessel'sche Ungleichung:

$$||x||^2 \geq ||S_N||^2$$

2.1.4 Dirac-Distribution - Rechenregeln

- $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0)$
- $\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}d\omega;\ \ \delta(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\omega t}dt$
- $\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|}$
- $\frac{1}{T_0}\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega_0 t} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t - nT_0)$
- $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\omega T_0} = \omega_0\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)$
- $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

2.1.5 Sonstiges

$$sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \qquad cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

2.2 Fourier-Reihe

Sei $V = \{f : (O, T) \to \mathbb{C}, \text{stückweise stetig}\}$ bzw.
$V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \text{T-periodisch, stückweise stetig}\}$ und gelte $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dann ist das Skalarprodukt von $f, g \in V$ wie folgt definiert:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_T f(t)\overline{g(t)}dt$$

$$||f||^2 = \frac{1}{T}\int\limits_T |f(t)|^2 dt$$

Die Fourier-Basis (ONS) ist wie folgt definiert:

$$e_k = e^{ik\omega t} \qquad k \in \mathbb{Z},\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

2.2.1 Fourier-Analyse

Bei der Fourier-Analyse wird der Zeitbereich in ein Frequenzbereich (Spektrum von f) überführt.

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \langle f, e_k\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_T f(t)e^{-ik\omega t}dt$$

N.B.
Falls z.B. $T = 2\pi$ gewählt wird und die Funktion $f(t)$ sogar π-periodisch ist, dann gilt $c_k = 0$ für alle ungeraden k.

2.2.2 Fourier-Synthese

Bei der Fourier-Synthese wird der Frequenzbereich in den Zeitbereich überführt.

$$(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \bullet\!\!-\!\!\circ f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, e_k\rangle e_k(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}$$

2.2.3 Reelle Darstellung

Falls f reellwertig, dann gilt $\overline{c_k} = c_{-k}$. Die reelle Darstellung lautet wie folgt:

$$f(t) = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)}_{\text{ungerader Anteil}}$$

Für die Koeffizienten gilt:

$$a_k = 2Re(c_k) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_k = -2Im(c_k) = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(k\omega t)dt$$

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \text{ für } k > 0$$

2.2.4 Konvergenz von S_N

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig diffbar (mit nur endlich vielen Sprungstellen), dann gilt:

- S_N konvergiert für alle $t \in \mathbb{R}$
- S_N konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Intervall ohne Sprungstelle
- An den Sprungstellen gilt
  - $S_f(t) = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$
  - Gibbs-Phänomen:
    S_N schwingt für $N \to \infty$ stets um ca. 18% über.

2.2.5 Rechenregeln

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig diffbar und T-periodisch, dann gelten für

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet (c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \qquad g \circ\!\!-\!\!\bullet (d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

folgende Rechenregeln:

- Linearität ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

$$\alpha f + \beta g \circ\!\!-\!\!\bullet (\alpha c_k + \beta d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Konjugation

$$\overline{f} \circ\!\!-\!\!\bullet (\overline{c_{-k}})_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Zeitumkehr

$$f(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet (c_{-k})_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Änderung der Zeitskala

$$f(\gamma t) \circ\!\!-\!\!\bullet (c_k)_{k\in\mathbb{Z}}; \qquad \gamma > 0$$

  Periode: $\frac{T}{\gamma}$

- Verschiebung im Zeitbereich (Phasenverschiebung)

$$f(t+a) \circ\!\!-\!\!\bullet (e^{ik\omega a} c_k)_{k\in\mathbb{Z}}; \qquad a \in \mathbb{R}$$

- Verschiebung im Spektralbereich

$$e^{in\omega t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (c_{k-n})_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Symmetrien
  - f gerade: $f\left(\frac{T}{2}+t\right) = f\left(\frac{T}{2}-t\right)$

$$c_k = c_{-k}$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt$$

$$b_k = 0$$

  - f ungerade: $f\left(\frac{T}{2}+t\right) = -f\left(\frac{T}{2}-t\right)$

$$c_k = -c_{-k}$$

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt$$

- Ableitung
  Sei f stetig, f' stückweise stetig, dann gilt

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (i\omega k c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

- Stammfunktion
  Sei f stückweise stetig und $c_0 = 0$ (sonst ist die Stammfunktion nicht periodisch), dann gilt

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \begin{cases} \frac{c_k}{ik\omega} & k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \\ -\frac{1}{T}\int_0^T tf(t)dt & k = 0 \end{cases}$$

- Größenordnung der Fourierkoeffizienten
  $f, f', ..., f^{(m-1)}$ stetig, $f^{(m)}$ stückweise stetig

$$\exists M > 0 : |c_k| \leq \frac{M}{|k|^m}$$

  Sonderfall: $f \in C^\infty$

$$\Rightarrow \forall m \; \exists M = M(m) : |c_k| \leq \frac{M}{|k|^m}$$

- Periodische Faltung

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T}\int_T f(t-\tau)g(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet (c_k d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$$

2.2.6 Rechenregeln / Eigenschaften von Faltung

- Kommutativität

$$f * g = g * f$$

- Linearität

$$h * (\alpha f + \beta g) = \alpha(h * f) + \beta(h * g)$$

- Glättung: f, g stückweise stetig $\Rightarrow f * g$ stetig
- Symmetrieeigenschaften:
  - gerade Fkt. * gerade Fkt. ⇒ gerade Fkt.
  - ungerade Fkt * ungerade Fkt. ⇒ gerade Fkt.
  - ungerade Fkt * gerade Fkt. ⇒ ungerade Fkt.

2.2.7 Häufig verwendete Funktionen

Sägezahnfunktion:

$$f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t); \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$c_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{1}{2ki} & k \neq 0 \end{cases}$$

2.3 Diskrete Fourier-Transformation

Es gilt

$$c_k \approx \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f_l \cdot \omega_n^{kl}$$

mit $\omega_n = e^{-\frac{2\pi i}{n}}$ und $k = 0, 1, ..., n-1$.
In Matrix-Schreibweise lautet die diskrete FT

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}}_{\tilde{c}} = \frac{1}{n} M \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}}_{f}$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \omega_n^3 & ... & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \omega_n^6 & ... & \omega_n^{2\cdot(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{(n-1)\cdot 2} & \omega_n^{(n-1)\cdot 3} & ... & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

2.3.1 Trigonometrische Interpolation

Aufgabe:
Finde zu gegebenen Daten (t_l, f_l) mit $t_l = \frac{2\pi l}{n}, l = 0, 1, ..., n-1$ ein trigonometrisches Polynom mit

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k e^{ikt}$$

sodass $p(t_l) = f_l \; \forall \; l$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } p = \tilde{c}$$

$\mathcal{N.B.}$
$\frac{1}{\sqrt{n}} M_n$ ist unitär, d.h. $\overline{M_n^T} M_n = nI$

$$\Rightarrow \left(\overline{M_n^T}\right)^{-1} = \frac{1}{n} M_n$$

2.4 Fourier-Transformation (FT)

2.4.1 Voraussetzungen

1) f stückweise stetig diffbar

2) An Sprungstelle gilt: $f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

- $F(\omega)$ ist beschränkt und stetig
- Formel von Plancherel

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

2.4.2 Analyse

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

2.4.3 Synthese

$$F(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

2.4.4 Rechenregeln

Für $f \circ\!\!-\!\!\bullet F, g \circ\!\!-\!\!\bullet G$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $c \neq 0$ gelten folgende Rechenregeln:

- Linearität
$$\alpha f + \beta g \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F + \beta G$$
- Konjugation
$$\overline{f} \circ\!\!-\!\!\bullet \overline{F(-\omega)}$$
- Skalierung
$$f(ct) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$$
- Verschiebung im Zeitbereich
$$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-i\omega a} F(\omega)$$
- Verschiebung im Frequenzbereich
$$e^{iat} \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega - a)$$
- Symmetrien
  - f gerade $\circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ gerade
  - f gerade $\circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t) dt$
  - f ungerade $\circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)$ ungerade
  - f ungerade $\circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin(\omega t) dt$

  $\Rightarrow f_g \circ\!\!-\!\!\bullet Re(F(\omega))$ bzw. $f_u \circ\!\!-\!\!\bullet iIm(F(\omega))$
- Ableitung im Zeitbereich
f' erfüllt 1) und 3), f stetig
$$f' \circ\!\!-\!\!\bullet i\omega F(\omega)$$
- Ableitung im Frequenzbereich
$tf(t)$ erfüllt 1), 2), 3)
$$-itf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F'(\omega)$$
- Integration im Zeitbereich
$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{i\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$$

- Integration im Frequenzbereich

$$\frac{i}{t}f(t) + \pi f(0)\delta(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)d\Omega$$

- Größenordnung von $F(\omega)$
  $f, f', ..., f^{(n-1)}$ stetig, $f^{(n)}$ stückweise stetig

$$|F(\omega)| = O\left(\frac{1}{\omega^n}\right), \omega \to \infty$$

- Dualitätsprinzip
  $f \in C^n$, $\int_{-\infty}^{\infty} |t^m f(t)|dt < \infty$

$$[(-it)^m f(t)]^{(n)} \circ\!\!-\!\!\bullet (i\omega)^n F^{(m)}(\omega)$$

- Faltung

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)G(\omega)$$

- Modulation

$$f(t)g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$$

$$f(t)\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2}[F(\omega+\omega_0) + F(\omega-\omega_0)]$$

- Korrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t+\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\bullet F^*(\omega)G(\omega)$$

2.4.5 Zusammenhang FR ⇔ FT

$$\tilde{f}(t+rT) = \tilde{f}(t);\ r \in \mathbb{Z}$$

$$f(t) = \begin{cases} \tilde{f}(t) & \text{für } t \in \{T\} \\ 0 & \text{für } t \notin \{T\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T \cdot c_k = F(k\omega)$$

2.4.6 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Sei folgende DGL gegeben:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + ... + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

Ansatz zum Lösen der homogenen DGL:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Sei $x_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen und $x_p(t)$ die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL, dann gilt:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Bestimmen der partikulären Lösung mittels FT:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega); \qquad x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$$

$$[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_1(i\omega) + a_0]X(\omega) = F(\omega)$$

$$X(\omega) = \underbrace{\frac{1}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + ... + a_1(i\omega) + a_0}}_{H(\omega)} \cdot F(\omega)$$

$$H(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$\Rightarrow x_p(t) = h(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2.5 Laplace-Transformation

Eine Funktion $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt Laplace-transformierbar, falls das uneigentliche Integral

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

für ein $s \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall heißt $F(s)$ die Laplace-Transformierte von $f(t)$:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)$$

2.5.1 Existenz und Eindeutigkeit

Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stückweise stetig und wachse nur exponentiell an, d.h. $\exists M > 0, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t > 0$, dann gilt:

- $F(s)$ existiert für alle s mit $Re(s) > \sigma$
- f ist bis auf Unstetigkeitsstellen durch F eindeutig bestimmt
- $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$
- $F(s)$ ist für $Re(s) > \sigma$ beliebig oft differenzierbar

$\mathcal{N}.\mathcal{B}.$
Das kleinste $\sigma > 0$, für das die Voraussetzungen gelten, heißt **Konvergenz-Abszisse**.

2.5.2 Rechenregeln

Für $f \circ\!\!-\!\!\bullet F, g \circ\!\!-\!\!\bullet G$, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

- Linearität

$$\alpha f + \beta g \circ\!\!-\!\!\bullet \alpha F + \beta G$$

- Zeitverschiebung

$$u(t-t_0)f(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-st_0}F(t)$$

- Frequenzverschiebung

$$e^{s_0 t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s-s_0)$$

- Maßstabsänderung

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

- Ableitung der Urbildfunktion
  f stetig und f' Laplace-transformierbar für $s > \sigma$

$$\frac{d}{dt}f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet sF(s) - f(0)$$

  Allgemeiner:
  $f, ..., f^{(n-1)}$ stetig, $f^{(n)}$ Laplace-transformierbar

$$f^{(n)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0)$$

- Ableitung der Bildfunktion

$$-tf(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{d}{ds}F(s)$$

- Integration

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}F(s)$$

- Produktformel

$$F(s)G(s) = F(s)\int_0^\infty e^{-st} g(t)dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^x f(x-t)g(t)dtdx$$

- Faltung

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(s)G(s)$$

2.5.3 Rechenregeln für Faltung

- Kommutativität

$$f * g = g * f$$

- Linearität

$$h * (\alpha f + \beta g) = \alpha(h * f) + \beta(h * g)$$

- Glättung: f, g stückweise stetig $\Rightarrow f * g$ stetig
- Interpretation als Verallgemeinerung des unbestimmten Integrals:

$$\int_0^t f(\tau)d\tau = 1 * f(t)$$

  m-fache unbestimmte Integration von f:

$$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} * f$$

2.5.4 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Sei folgende DGL gegeben:

$$\underbrace{a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y'(t) + a_0 y(t)}_{L[y]} = b(t)$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ und den Anfangswerten $y(0) = y_0, y'(0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$.

Lösung mit Laplace-Transformation:

$$a_n y^{(n)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet a_n[s^n Y(s) - s^{n-1} y_0 - ... - s y_{n-2} - y_{n-1}]$$
$$a_{n-1} y^{(n-1)} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet a_{n-1}[s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y_0 - ... - s y_{n-2}]$$
$$\vdots$$
$$a_1 y' \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet a_1[sY(s) - y_0]$$
$$a_0 y \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet a_0[Y(s)]$$

$$L[y] = b(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet B(s) = \underbrace{[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_0]}_{P(s)} Y(s)$$
$$- \underbrace{[a_n s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + ... + a_1]}_{P_1(s)} y_0$$
$$- ... - \underbrace{[a_n]}_{P_n(s)} y_{n-1}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{P(s)}}_{H(s)}[B(s) + P_1(s)y_0 + ... + P_n(s)y_{n-1}]$$

$$Y(s) = H(s)B(s) + y_0 H(s)P_1(s) + ... + y_{n-1}H(s)P_n(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\, y(t) = \int_0^t h(t-\tau)b(\tau)d\tau + y_0 h_1(t) + ... + y_{n-1} h_n(t)$$

3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche DGL ist eine Gleichung für eine Funktion einer Variablen, die auch Ableitungen dieser Funktion enthält:

$$F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0$$

Definitionen:

- Implizite Form:

$$F(t, x(t), ..., x^{(n)}(t)) = 0$$

- Explizite Form:

$$x^{(n)}(t) = F(t, x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

- Autonome DGL:

$$x^{(n)}(t) = F(x(t), x'(t), ..., x^{(n-1)}(t))$$

- Eine einzelne Lösung, die keine frei wählbare Konstante enthält, heißt **spezielle** oder **partikuläre Lösung**.
- Eine Lösung, die keiner Lösungsschar angehört, heißt **singuläre Lösung**.

- Eine Lösung heißt **allgemein**, wenn sie n (= Grad der DGL) frei wählbare Konstanten enthält und **vollständig**, wenn dadurch alle Lösungen erfasst werden.
- Die Darstellung aller Lösungskurven im Phasenraum (Zustandsraum) nennt man **Phasenportrait**.
  → siehe letzte Seite

3.1 Lineare DGL

Eine DGL $\dot{x} = f(x)$ heißt linear, falls das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ linear ist, d.h. falls für $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$$

3.1.1 Autonome DGL

Eine autonome, lineare DGL hat die Form

$$\dot{x} = Ax$$

mit $x \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$.

Lösung:
Falls A Diagonalmatrix:

$$x(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{a_1 t} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & e^{a_d t} \end{pmatrix}}_{e^{At}} x_0$$

Falls A diagonalisierbare Matrix:

$$x(t) = V \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & e^{\lambda_d t} \end{pmatrix}}_{e^{Lt}} V^{-1} x_0$$

mit den Eigenwerten λ_i und Eigenvektoren V_i von A, $V = (V_1, ..., V_d)$.

N.B.
Jeder Eigenraum $E \subset \mathbb{R}^d$ von A ist **invariant** für die Lösungen von $\dot{x} = Ax$, d.h. wenn $x_0 \in E$, dann gilt auch $x(t) \in E \; \forall t$.

Matrix-Exponentialfunktion:
Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ gilt:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + ...$$

Diese Reihe konvergiert absolut (und ist somit diffbar).

$\Rightarrow x(t) = e^{At} x_0$ ist die allgemeine Form der Lösung.

N.B.

- Falls $AB = BA$, dann gilt:

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

- Für eine Diagonalmatrix $A = diag[A_1, ..., A_m]$, wobei $A_1, ..., A_m$ Matrizen sind, gilt:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{A_1} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & e^{A_m} \end{pmatrix}$$

- Falls V regulär ($det(V) \neq 0$) und $A = VBV^{-1}$:

$$e^A = V e^B V^{-1}$$

Falls A nicht-diagonalisierbare Matrix:

→ Jordan-Normalform

$x(t) = V e^{Jt} V^{-1} x_0 = V e^{(D+N)t} V^{-1} x_0$

$$x(t) = V \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & e^{\lambda t} \end{pmatrix}}_{e^{Dt}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & ... & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e^{Nt}} V^{-1} x_0$$

mit

$$J = V^{-1} A V; \quad V \text{ regulär}, \; J \in \mathbb{C}^{k \times k}$$
$$V = [\underbrace{v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, ..., v_{n_1}^{(1)}}_{\text{Hauptvektoren zum EW1}}, v_1^{(2)}, ..., v_{n_2}^{(2)}, ..., v_1^{(r)}, ..., v_{n_r}^{(r)}]$$

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & J_m \end{pmatrix}; \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & ... & ... & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$J = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & ... & ... & \lambda \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$

wobei J_i die Jordan-Blöcke und λ_i die Eigenwerte von A sind. Des Weiteren ist die Matrix N nilpotent.

N.B.
Eine Matrix $N \in \mathbb{R}^{d \times d}$ heißt nilpotent, falls $\exists k \in \mathbb{N}$, sodass $N^k = 0$.

Fundamentalsystem:

$$\varphi_1^{(i)}(t) = (t^{n_i-1} e^{\lambda_i t}, t^{n_i-2} e^{\lambda_i t}, ..., e^{\lambda_i t})^T$$
$$\varphi_2^{(i)}(t) = (t^{n_i-2} e^{\lambda_i t}, t^{n_i-3} e^{\lambda_i t}, ..., e^{\lambda_i t}, 0)^T$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{n_i}^{(i)}(t) = (e^{\lambda_i t}, 0, ..., 0)^T$$

wobei λ_i der i-te Eigenwert mit der Vielfachheit n_i ist.

Komplexe Eigenwerte

Sei $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $z \in \mathbb{C}$ eine Komponente des diagonalisierten Systems:

$$\Rightarrow \dot{z} = \lambda z$$

Dann lautet die Lösung:

$$z(t) = e^{\lambda t} z_0 = e^{\alpha t} e^{i\beta t} z_0 = a(t) + ib(t)$$

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \underbrace{\begin{pmatrix} cos(\beta t) & -sin(\beta t) \\ sin(\beta t) & cos(\beta t) \end{pmatrix}}_{\text{Rotation um O mit Winkel } \beta t} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Drehsinn:

- $a_{21} - a_{12} > 0 \Rightarrow$ gegen Uhrzeigersinn
- $a_{21} - a_{12} < 0 \Rightarrow$ im Uhrzeigersinn

3.1.2 Nichtautonome Systeme

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

z.B.

$$\dot{x} = a(t)x; \quad \text{wobei } a : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\Rightarrow x(t) = exp\left(\int_{t_0}^{t} a(\tau) d\tau\right) x_0$$

3.1.3 Nichtautonome lineare DGL

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) \quad \text{wobei } A : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{d \times d} \text{ stetig}$$

Jede Lösung lässt sich als Linearkombination von d linear unabhängigen Lösungen (Basisfunktionen) $f_1(t), ..., f_d(t)$ schreiben.

$$x(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_d f_d(t) = \Phi(t)c$$
$$\Phi(t) = [f_1(t), f_2(t), ..., f_d(t)]$$

$\{f_1, ..., f_d\}$ heißt **Fundamentalsystem** und Φ heißt **Fundamentalmatrix**. Es gilt:

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi$$

Für $\Phi(t_0) = I$ gilt:

$$x(t) = \Phi(t)x_0$$

<u>Definition:</u>
Die Funktion $(t, t_0) \to \Phi(t, t_0)$ heißt **Übertragungsmatrix** oder Fundamentalmatrix zum Anfangswert t_0.

Jede Lösung lässt sich in der Form

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0$$

schreiben.

<u>Bemerkungen:</u>

- $\Phi(t_0, t_0) = I$
- $\Phi(s, t)\Phi(t, t_0) = \Phi(s, t_0)$ ("Flusseigenschaft")
- $\Phi(t_0, t) = \Phi(t, t_0)^{-1}$

3.1.4 Inhomogene lineare Systeme

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \quad \text{wobei } b : I \to \mathbb{R}^d \text{ stetig ist}$$

Lösung:

$$x(t) = \underbrace{\overbrace{\Phi(t, t_0)}^{e^{A(t-t_0)}} x_0}_{\text{Lösung hom.}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \overbrace{\Phi(t, s)}^{e^{A(t-s)}} b(s) ds}_{\text{part. Lösung}}$$

$$\Phi(t, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(t_0, s) = \Phi(t, t_0)\Phi(s, t_0)^{-1}$$

3.2 Lösungstheorie

3.2.1 Umformung in Gleichung erster Ordnung

Sei

$$F(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n)}) = 0$$

Falls sich die Gleichung nach $x^{(n)}$ auflösen lässt:

$$x^{(n)} = G(t, x, \dot{x}, ..., x^{(n-1)})$$

dann

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ G(t, y_1, ..., y_{n-1}) \end{pmatrix}$$

3.2.2 Anfangswertprobleme

Sei $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$, dann gilt:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) ds$$

Definitionen:

- Ein Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^d$ heißt lokal **Lipschitz-stetig** in x, falls für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq D$ eine Konstante $L_K \geq 0$ existiert, sodass

  $$||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leq L_K ||x_1 - x_2|| \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in K$$

- Falls f in t stetig und in x lokal Lipschitz-stetig ist, dann gibt es zu jeder Anfangsbedingung $(t_0, x_0) \in D$ genau eine Lösung des AWP.
  Diese ist definiert für alle t aus einem maximalen Existenzintervall $I = I(t_0, x_0) \subseteq \mathbb{R}$ (**Satz von Lindelöf**).

3.2.3 Verhalten am Rand des Existenzintervalls

Am Rand des Existenzintervalls $I = I(t_0, x_0)$ hört die Lösung auf zu existieren.
Ist I beschränkt, so kann dies zwei Ursachen haben:

- die Lösung divergiert
- die Lösung konvergiert gegen einen Randpunkt von D

3.2.4 Folgerungen aus dem Eindeutigkeitssatz

- Kozykleneigenschaft:

$$x(t, t_0, x_0) = x(t, t^*, x(t^*, t_0, x_0))$$

- unterschiedliche Lösungen können sich nicht schneiden (entweder stimmen sie ganz oder zu keiner Zeit überein)

3.3 Analytische Lösungsmethoden

3.3.1 Trennung der Variablen

Sei $\dot{x} = f(t, x) = \frac{g(t)}{h(x)}$, dann gilt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g(t)}{h(x)} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} h(x)dx = \int_{t_0}^{t} g(t)dt$$

3.3.2 Exakte DGL

$$\dot{x} = f(t, x) = -\frac{g(t, x)}{h(t, x)}$$
$$0 = h(t, x)\dot{x} + g(t, x)$$

Eine DGL der obigen Form heißt **exakt**, wenn eine stetig diffbare Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = g(t, x)$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = h(t, x)$$

Es gilt:

$$\text{DGL exakt} \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \forall (t, x) \in D$$

3.4 Numerische Lösungsmethoden

Sei $\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0, f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$.

3.4.1 Explizites Euler-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k)$$

mit $k = 0, 1, 2, ...$ und Schrittweite h.

3.4.2 Implizites Euler-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_{k+1})$$

mit $k = 0, 1, 2, ...$ und Schrittweite h.

Mittelpunktsregel:

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(t_k, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

3.4.3 Einschrittverfahren

Sei

$$\Delta = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subseteq \mathbb{R} \text{ mit Schrittweiten } h_i = t_{i+1} - t_i$$
$$h_\Delta = \max(h_i)$$
$$x_\Delta(t_0) = x_0$$
$$x_\Delta(t_{k+1}) = \Psi(x_\Delta(t_k), t_k, h)$$

Definitionen:

- **Einschrittverfahren** (ESV):
Sukzessive Berechnung von x_Δ, wobei in die Berechnung von $x_\Delta(t_{k+1})$ nur $x_\Delta(t_k)$ eingeht.
- Ein ESV heißt **konsistent**, wenn

  1) $\Psi(x_\Delta(t_k), t_k, 0) = x_\Delta(t_k)$
  2) $\frac{d}{dh}\Psi(x_\Delta(t_k), t_k, h)|_{h=0} = f(t, x)$

- **Konsistenzfehler**

$$\epsilon(x, t, h) = x(t + h, t, x) - \Psi(x, t, h)$$

- Ein ESV Ψ hat die **Konsistenzordnung** $p \in \mathbb{N}$, falls

$$\epsilon(x, t, h) = O(h^{p+1}) \text{ für } h \to 0$$
$$\text{bzw. } \exists C : \ |\epsilon(x, t, h)| \leq Ch^{p+1}$$

Bsp.: Explizites Eulerverfahren: $p = 1$

Unter geeigneten Voraussetzungen (Lipschitz), sind folgende Aussagen äquivalent:

- Das ESV Ψ ist konsistent
- $\frac{\epsilon(x,t,h)}{h} \to 0$ für $h \to 0^+$
- Das ESV hat die Form $\Psi(x, t, h) = x + h\Psi(x, t, h)$

3.4.4 Runge-Kutta-Verfahren (RKV)

Allgemeines RKV:

$$\Psi(x, t, h) = x + h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$
$$k_i = f\left(t + c_i h, x + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j\right)$$

mit $c = (c_1, ..., c_s)^T \in \mathbb{R}^s, b = (b_1, ..., b_s) \in \mathbb{R}^s$,
$A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{s \times s}$

Falls $a_{ij} = 0$ für $j \geq i$, dann ist das RKV **explizit**.

Butcher-Schema:

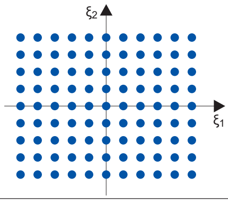
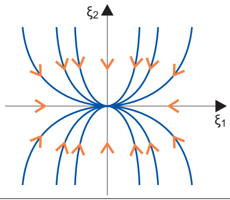
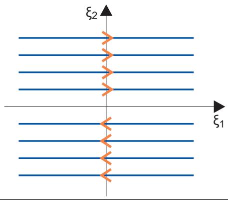
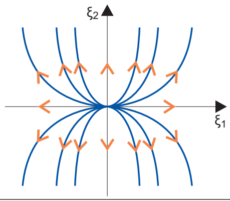
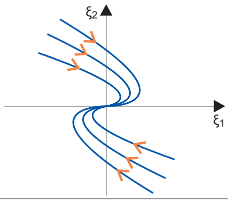
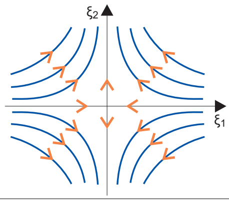
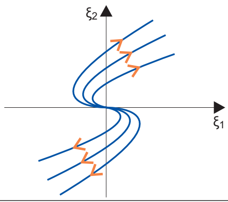
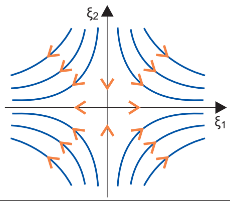
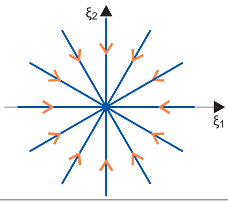
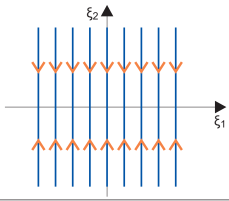
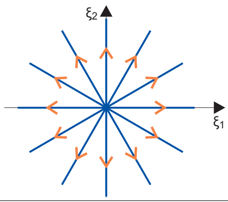
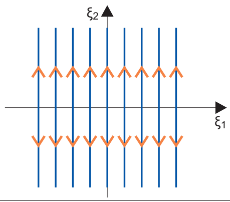
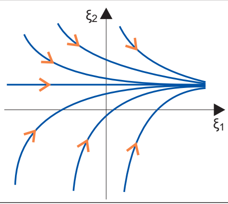
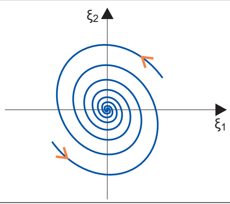
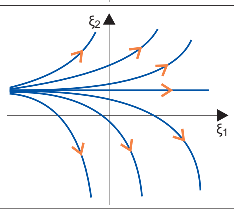
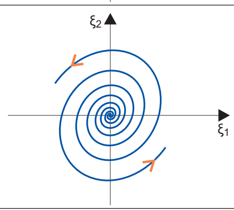
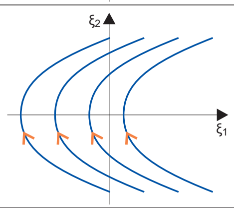
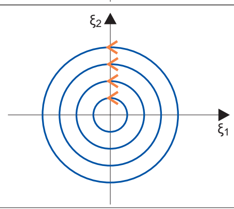
$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array}$$

3.4.5 Linearisierung

Sei $\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0$ und sei f Lipschitz-stetig in $D \in \mathbb{R}^d$.
Dann hat f in einer hinreichend kleiner Umgebung von x^* die Form

$$f(x) \approx J(x^*) \cdot (x - x^*)$$
$$\Rightarrow \dot{x} = J(x^*) \cdot (x - x^*)$$

Falls $J(x^*)$ nur Eigenwerte mit $Re(\lambda) \neq 0$ besitzt, so heißt x^* **hyperbolisch**.

Ohne Erregung und ein reeller EW		Ohne Erregung und zwei reelle EW	
$\lambda = 0$ und Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ - stabil - Ebene von Ruhelagen			$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ - asymptotisch stabil - Knoten 2. Art
$\lambda = 0$ und Matrix $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ - instabil			$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ - instabil - Knoten 2. Art
$\lambda < 0$ und $\mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - asymptotisch stabil - Knoten 3. Art			$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ - instabil - Sattelpunkt
$\lambda > 0$ und $\mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - instabil - Knoten 3. Art			$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ - instabil - Sattelpunkt
$\lambda < 0$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - asymptotisch stabil - Knoten 1. Art			$\lambda_2 < 0 = \lambda_1$ - stabil
$\lambda > 0$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - instabil - Knoten 1. Art			$\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ - instabil
Mit Erregung und reellen EW		**Ohne Erregung und komplexen EW**	
$\lambda_2 < 0 = \lambda_1$ - instabil			$\alpha < 0;\ \beta > 0$ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ - asymptotisch stabil - Strudelpunkt - Drehsinn in x_1/x_2-Ebene evtl. anders!
$\lambda_1 = 0 < \lambda_2$ - instabil			$\alpha > 0;\ \beta > 0$ - instabil - Strudelpunkt - Drehsinn in x_1/x_2-Ebene evtl. anders!
$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ - instabil			$\alpha = 0;\ \beta > 0$ - stabil - Wirbelpunkt - Drehsinn in x_1/x_2-Ebene evtl. anders!