1 Elektrizität und Magnetismus

1.1 Mathematik

- Wegintegral:

$$\int_{C(P_1,P,2)} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \vec{F}(\vec{r}(\lambda))\frac{d\vec{r}}{d\lambda}d\lambda$$

- Integrabilitätsbedingung:

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \Leftrightarrow \vec{F}(\vec{r})\ konservativ$$

- Zylinderkoordinaten:

$$h_r = 1;\ \ h_\varphi = r;\ \ h_z = 1;\ \ \varphi \in [0, 2\pi]$$

- Kugelkoordinaten:

$$h_r = 1;\ \ h_\theta = r;\ \ h_\varphi = r\sin(\theta)$$

- Gradient:

$$\nabla\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial u_i}\vec{e}_{u_i}$$

- Integralsatz von Gauß:

$$\int_V \nabla\vec{U}dv = \int_{\partial V} \vec{U}d\vec{a}$$

- Integralsatz von Stokes:

$$\int_A rot(\vec{U})d\vec{a} = \int_{\partial A} \vec{U}d\vec{r}$$

1.2 Elektrostatik

- $$\vec{F_q}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}\cdot(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

- $$\vec{F}_q(\vec{r}) = q\cdot\vec{E}(\vec{r})$$

- $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\cdot\int_{E_3}\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\rho(\vec{r'})d^3r'$$

- $$rot(\vec{E}) = 0 \Leftrightarrow \vec{E}\ konservativ \Leftrightarrow \oint \vec{E}d\vec{r} = 0$$

- Coulomb-Potential:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int_{E_3}\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|}d^3r'$$

- $$\vec{E} = -\nabla\Phi$$

- $$\nabla\vec{D} = \rho \Rightarrow \nabla(\epsilon\vec{E}) = \rho \Rightarrow \nabla\nabla\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

  $\Rightarrow$ Poissongleichung: $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$

  (Lösung: Coulomb-Potential im E_3)

- $$U_{12} = \Phi(P_1) - \Phi(P_2) = \int_{P_1}^{P_2}\vec{E}d\vec{r}$$

- $$\Phi(\vec{r}) = \Phi(\vec{r}_0) - \int_{P_0}^{P_1}\vec{E}d\vec{r}$$

- $$W_{12} = \int_C \vec{F}d\vec{r} = q\cdot U_{12}$$

- $$\vec{D}\cdot\vec{N} = \sigma$$

- $$\sigma = \frac{Q}{A}$$

- $$Q = \int_A \sigma(\vec{r})da = \sum_{\vec{r_i}\in V} q_i$$

- Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U}$$

- Kugelkondensator:

$$C = 4\pi\epsilon\frac{a\cdot b}{b - a}$$

- $$W_{el} = \int_0^Q u(q)dq = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

- Elektrische Energiedichte:

$$w_{el} = \frac{1}{2}\cdot\vec{E}\cdot\vec{D}$$

- Raumladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = q\cdot n(\vec{r})$$

  n: Anzahl Ladungsträger pro Volumen

- Unendlich langer zylindrischer Leiter:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon}\cdot\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}$$

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{q}{2\pi\epsilon}\cdot ln|\vec{r} - \vec{r}_0|$$

1.3 Stationäre Ströme

- $$I_A = \left.\frac{dQ}{dt}\right|_A$$

- $$I(A) = \int_A \vec{j}\, d\vec{a}$$

  $\vec{j}$: Elektrische Stromdichte

- $$\vec{j} = \sum_{\alpha=1}^{K} q_\alpha \cdot n_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{K} |q_\alpha| \cdot n_\alpha \cdot \mu_\alpha \cdot \vec{E}$$

  μ_α: Beweglichkeit

- Mittlere Driftgeschwindigkeit

  $$\vec{v} = \frac{q \cdot \tau}{m^*} \cdot \vec{E} = sgn(q)\mu\vec{E}$$

  τ: mittlere Stoßzeit
  m^*: effektive Masse
  μ: Beweglichkeit

  $$\mu = \frac{|q|\tau}{m^*}$$

- Spezifische el. Leitfähigkeit

  $$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{k} |q_\alpha| n_\alpha \mu_\alpha$$

- Lokales Ohmsches Gesetz:

  $$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}$$

- Spezifischer el. Widerstand:

  $$\rho = \frac{1}{\sigma}$$

- Elektrischer Leitwert

  $$G = \sigma \cdot \frac{A}{l}$$

- Elektrischer Widerstand:

  $$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

- Ohmsches Gesetz

  $$U = R \cdot I$$

- KCL:

  $$0 = \int_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} \vec{j}\, d\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} I_k$$

- Ladungsbilanzgleichung (integrale Form):

  $$\frac{dQ(V)}{dt} = -\int_{\partial V} \vec{j}\, d\vec{a}$$

- Ladungsbilanzgleichung (differentielle Form):

  $$\nabla \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- El. Leistung einer Punktladung:

  $$P_{el} = q \cdot \vec{E} \cdot \vec{v}$$

- El. Leistungsdichte:

  $$p_{el} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

- El. Leistung:

  $$P_{el} = \int_V p_{el}(\vec{r})dv = U \cdot I = \frac{U^2}{R} = I^2 \cdot R$$

- El. Energieübertragungsstrecke:

  $$\eta = 1 - \frac{R_L \cdot P_E}{U_E^2}$$

1.4 Magnetostatik

- Lorentzkraftdichte:

  $$\vec{f}_L = \vec{j} \times \vec{B}$$

  $$\vec{f}_{em} = \rho \cdot \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}$$

  ρ: Raumladungsdichte

- Lorentzkraft:

  $$\vec{F}_{Leiter} = \int_{Leiter} \vec{f}_L d^3r$$

  $$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

- Kraft auf linienförmige Leiter:

  $$d\vec{F}_L = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

  $$\vec{F}_{Leiter} = \int_C d\vec{F}_L$$

- Elektromagn. Kraft:

  $$\vec{F}_{em} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

- Amperesches Durchflutungsgesetz:

  $$I(A) = \int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r}$$

- Magnetfeld von unendlich langem Leiter:

  $$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

- Kraft auf Leiter beliebiger Gestalt:

  $$\vec{F}_{Leiter} = \int_{Leiter} \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) d^3r$$

- Kraft auf linienförmige Leiter:

$$\vec{F}_{Leiter} = \int_C d\vec{F}_L; \quad d\vec{F}_L = I \cdot d\vec{s} \times \vec{B}$$

- Magnetisches Moment

$$\vec{m} = I \cdot \vec{A}$$
$$\vec{m} = V \cdot \mathcal{M}$$

$\mathcal{M}$: Magnetisierung

- Drehmoment:

$$\vec{M} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{m} \times \vec{B}$$

- Permanentmagnet:

$$\mathcal{M} = n \cdot < \vec{m_0} >$$

$< \vec{m_0} >$: Mittelwert der atomaren magn. Momente
n: Anzahl pro Volumen

- $$\mathcal{M} = \mathcal{X}_m \cdot \vec{H}$$
$$\mu_r = 1 + \mathcal{X}_m$$

$\mathcal{X}_m$: magnetische Suszeptibilität

1.5 Induktion

- Magnetischer Fluss:

$$\Phi_{mag} = \int_A \vec{B} d\vec{a}$$

- Induktionsspannung:

$$U_{ind} = -\dot{\Phi}_{mag}$$
$$\vec{E}_{ind} = \vec{v} \times \vec{B}$$
$$U_{ind} = \underbrace{-\int_{A(t)} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a}}_{Ruheinduktion} + \underbrace{\int_{\partial A(t)} \vec{v} \times \vec{B} d\vec{r}}_{Bewegungsinduktion} = -\Phi(\dot{A}(t))$$

1.6 Maxwellsche Gleichungen

1.6.1 Integrale Form

- $$\int_{\partial V} \vec{D} d\vec{a} = \int_V \nabla \vec{D} dv = Q(V) = \int_V \rho(\vec{r}) dv$$

- $$\int_{\partial V} \vec{B} d\vec{a} = 0$$

- $$\int_{\partial A} \vec{E}_{ind,r} d\vec{r} = -\int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{a}$$

- Erweiterung des Ampere'schen Gesetzes:

$$\int_{\partial A} \vec{H} d\vec{r} = \int_A \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{a}$$

1.6.2 Differentielle Form

- Gauß'sches Gesetz

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

- Quellenfreiheit des $\vec{B}$-Feldes

$$\nabla \vec{B} = 0$$

- Faraday'sches Induktionsgesetz

$$rot(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Ampere'sches Durchflutungsgesetz

$$rot(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

1.7 Materialgleichungen

- $$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

- $$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

- $$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

1.8 Einheiten

- Elektrische Leitfähigkeit

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = \frac{A^2 s^3}{m^3 kg}$$

- Beweglichkeit

$$[\mu] = \frac{m^2}{Vs} = \frac{As^2}{kg}$$

- Absolute Permittivität

$$[\epsilon_0] = \frac{As}{Vm}$$

- Spannung

$$[V] = \frac{kg \cdot m^2}{As^3}$$

- Absolute Permeabilität

$$[\mu_0] = \frac{\Omega s}{m} = \frac{Vs}{Am}$$

- Magnetische Flussdichte

$$[B] = T = \frac{Vs}{m^2}$$

1.9 Sonstiges

- Gyrationsfrequenz:

$$\Omega = \frac{q \cdot B}{m}$$

- Stetigkeit

  $\overrightarrow{E}$: Tangentialkomponente stetig
  $\overrightarrow{D}$: Normalkomponente stetig
  $\overrightarrow{B}$: Normalkomponente stetig
  $\overrightarrow{H}$: Tangentialkomponente stetig