Inhaltsverzeichnis

I Mathematik 1 2

1 Grundlagen 2
1.1 Vollständige Induktion . . . 2
1.2 Summen . . . 2
1.3 Produkte . . . 2
1.4 Binomialkoeffizient . . . 2
1.5 Trigonometrie . . . 2
1.6 Logarithmus . . . 2
1.7 Quadratische Lösungsformel . . . 2
1.8 Mengen (Begriffe) . . . 3
1.9 Komplexe Zahlen . . . 3

2 Matrizenrechnung und lineare Gleichungssysteme 3
2.1 Rechenregeln . . . 3
2.2 Gauß'sches Eliminationsverfahren . . . 3
2.3 Rang einer Matrix . . . 3
2.4 Matrizenmultiplikation . . . 3
2.5 Transponierte einer Matrix . . . 3
2.6 Invertierbare Matrizen (= regulär bzw. nicht singulär) . . . 3
2.6.1 Allgemein . . . 3
2.6.2 Rechenregeln . . . 4
2.6.3 Gauß-Jordan-Verfahren . . . 4
2.7 Spezielle Matrizen . . . 4
2.7.1 Symmetrische Matrizen . . . 4
2.7.2 Schiefsymmetrische Matrizen . . . 4
2.7.3 Orthogonale Matrizen . . . 4

3 Determinanten 4
3.1 Rechenregeln . . . 4
3.2 Cramer'sche Regel . . . 5

4 Vektorräume 5
4.1 Bedingungen für einen Vektorraum . . . 5
4.2 Unterräume . . . 5
4.3 Kern einer Matrix . . . 5
4.4 Lineare Hülle . . . 5
4.5 Lineare Abhängigkeit . . . 5
4.5.1 Eigenschaften . . . 5
4.6 Basis . . . 5
4.7 Dimension . . . 5
4.8 Zeilen- und Spaltenräume einer Matrix . . . 5
4.8.1 Spaltenraum . . . 5
4.8.2 Zeilenraum . . . 6
4.8.3 Eigenschaften . . . 6

5 Metrik im euklidischen Vektorraum 6
5.1 Skalarprodukt . . . 6
5.1.1 Skalarprodukt auf Matrizen . . . 6
5.2 Norm . . . 6
5.2.1 Regeln für Normen . . . 6
5.2.2 l_p-Norm und l_∞-Norm . . . 6
5.2.3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung . . . 6
5.3 Winkel . . . 6
5.4 Orthogonale Zerlegung . . . 6
5.4.1 Gram-Schmidt-Orthogonalisierung . . . 7
5.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt) . . . 7
5.5.1 Eigenschaften . . . 7
5.6 Spatprodukt . . . 7
5.6.1 Eigenschaften . . . 7

6 Folgen und Reihen 7
6.1 Folgen . . . 7
6.1.1 Rechenregeln für Folgen und Grenzwerte . . . 7
6.1.2 Grenzwertbestimmung und Konvergenzbeweis . . . 7
6.1.3 Wichtige Folgen und Grenzwerte . . . 8
6.2 Unendliche Reihen . . . 8
6.2.1 Rechenregeln für Reihen . . . 8
6.2.2 Grenzwertbestimmung und Konvergenzkriterien . . . 8
6.2.3 Wichtige Reihen und Grenzwerte . . . 8

7 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit 9
7.1 Funktionsgrenzwerte . . . 9
7.1.1 Rechenregeln . . . 9
7.1.2 Konvergenzbeweise . . . 9
7.1.3 Wichtige Grenzwerte . . . 9
7.2 Stetige Funktionen . . . 9
7.2.1 Bisektionsverfahren . . . 9
7.2.2 Rechenregeln zur Stetigkeit . . . 9
7.2.3 Wichtige stetige Funktionen . . . 9

8 Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$ 10
8.1 Folgengrenzwerte in $\mathbb{C}$ . . . 10
8.2 Reihen in $\mathbb{C}$ . . . 10
8.3 Potenzreihen . . . 10
8.3.1 Konvergenzradius $(-R, R)$ bestimmen 10

9 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$ 10
9.1 Rechenregeln . . . 10
9.2 Differenzierbarkeit . . . 10
9.3 Extremstellen . . . 10
9.4 Satz von Rolle . . . 10
9.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . 10
9.6 Monotonie . . . 10
9.7 Krümmungsverhalten . . . 11
9.8 L'Hospital'sche Regel . . . 11
9.9 Umkehrfunktion . . . 11
9.9.1 Begriffe für Abbildungen . . . 11
9.9.2 Ableitung über die Umkehrfunktion 11
9.10 Wichtige Differentiale . . . 11

10 Integralrechnung in $\mathbb{R}$ 11
10.1 Rechenregeln . . . 11
10.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . 11
10.3 Integrationsmethoden . . . 12
10.3.1 Partielle Integration . . . 12
10.3.2 Substitution . . . 12
10.3.3 Partialbruchzerlegung . . . 12
10.3.4 Integration von Potenzreihen . . . 12
10.4 Uneigentliche Integrale . . . 12
10.5 Laplace-Transformation . . . 13
10.6 Wichtige Integrale . . . 13

11 Sonstiges 13
11.1 Sinus- und Kosinus Hyperbolicus . . . 13

Teil I
Mathematik 1

1 Grundlagen

1.1 Vollständige Induktion

Induktionsanfang:
Behauptung mit kleinstem Element für n testen.
Induktionsschritt:
Behauptung mit $n+1$ testen (Behauptung nutzen!).
Induktionsschluss:
Schlussfolgerung aus dem Ergebnis ziehen.

1.2 Summen

Distributivgesetz:

$$\sum_{k=m}^{n}(ca_k + db_k) = c\sum_{k=m}^{n} a_k + d\sum_{k=m}^{n} b_k$$

Indexumbenennung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Indexverschiebung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n-m} a_{m+i}$$

Multiplikation:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_k b_j = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_k b_j$$

Gauß'sche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.3 Produkte

Arithmetisch wachsende Glieder:

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Geometrisch wachsende Glieder:

$$\prod_{k=0}^{n} q^k = q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

1.4 Binomialkoeffizient

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

1.5 Trigonometrie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot(x)$	–	$\frac{3}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Sinus und Kosinus mit komplexen Zahlen:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Trigonometrischer Pythagoras:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Zum Tangens:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\tan(x+\pi) = \tan(x)$$

$$\cot(x+\pi) = \cot(x)$$

Additionstheoreme:

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

1.6 Logarithmus

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

$$a^x = e^{x\ln(a)}$$

$$b^{\frac{\ln(x)}{\ln(b)}} = x$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(\frac{a}{b}) = ln(a) - \ln(b)$$

$$\ln(x^a) = a\cdot\ln(x)$$

1.7 Quadratische Lösungsformel

Für Polynome zweiten Grades $p(x) = ax^2 + bx + c$ gilt für die Lösung der Gleichung $p(x) = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1.8 Mengen (Begriffe)

Supremum: Die kleinste obere Schranke der Menge.
Infimum: Die größte untere Schranke der Menge.
Maximum: = Supremum, falls es in der Menge liegt.
Minimum: = Infimum, falls es in der Menge liegt.

1.9 Komplexe Zahlen

Schreibweisen:

$$z = x + yi = (x, y)$$

$$x = Re(z); \quad y = Im(z)$$

$$z = r[\cos(\Phi) + i\sin(\Phi)] = r \cdot e^{i\Phi} = (r, \Phi)$$

Umwandlung kartesische Koordinaten ⇔ Polarkoordinaten:

$$x = r \cdot \cos(\Phi); \quad y = r \cdot \sin(\Phi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \Phi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}) & y < 0 \end{cases}$$

Rechenregeln:

$$e^{a+ib} = e^a[\cos(b) + i\sin(b)]$$

$$z \cdot w = (r_z \cdot r_w, \Phi_z + \Phi_w)$$

$$z^n = (r^n, n \cdot \Phi)$$

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\right]$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\overline{z} = x - yi$$

Sonstiges:

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\sqrt{i} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

2 Matrizenrechnung und lineare Gleichungssysteme

2.1 Rechenregeln

Für beliebige Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und reelle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$A + 0 = A$$

$$A + (-A) = 0$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$$

$$1 \cdot A = A$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

2.2 Gauß'sches Eliminationsverfahren

1) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$
2) Vorwärtselimination mit elementaren Zeilenumformungen mit dem Ziel, die Zeilenstufenform zu erhalten
3) Lösbarkeitstest
4) Falls lösbar, Rückwärtssubstitution

2.3 Rang einer Matrix

Die Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen von A in der Zeilenstufenform der Matrix nennt man Rang von A.

2.4 Matrizenmultiplikation

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times r} \to C \in \mathbb{R}^{m\times r}$

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_m \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & ... & s_r \end{pmatrix}$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} z_1s_1 & z_1s_2 & ... & z_1s_r \\ z_2s_1 & z_2s_2 & ... & z_2s_r \\ ... & ... & & ... \\ z_ms_1 & z_ms_2 & ... & z_ms_r \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

$$A(BC) = (AB)C$$

Im Allgemeinen gilt:

$$AB \neq BA$$

2.5 Transponierte einer Matrix

Vertauschen der Spalten und Zeilen ($\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$).

Rechenregeln

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^TA^T$$

Für Spaltenvektoren a, b gilt:

$$a^Tb = b^Ta$$

2.6 Invertierbare Matrizen (= regulär bzw. nicht singulär)

2.6.1 Allgemein

Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1) A ist invertierbar
2) $Rang(A) = n$
3) $det(A) \neq 0$

4) Kern(A)=0

5) Die Spalten von A sind linear unabhängig

6) Die Zeilen von A sind linear unabhängig

7) $dim(S_A) = dim(Z_A) = n$

8) 0 ist kein Eigenwert von A

2.6.2 Rechenregeln

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.6.3 Gauß-Jordan-Verfahren

1) Man "erweitert" die Matrix A mit der Einheitsmatrix und betrachtet die erweiterte Matrix $(A|I_n)$

2) Durch Vorwärtselimination bringt man die Matrix auf die Form $(M|N)$, wobei M die Zeilenstufenform der Matrix A ist

3) Hat die Matrix M keine Nullzeile, so ist die Matrix A invertierbar

4) Durch Rückwärtssubstitution formt man die Matrix M so um, dass daraus die Einheitsmatrix entsteht. Dann erhält man aus der Matrix N die Inverse $(I_n|A^{-1})$

2.7 Spezielle Matrizen

2.7.1 Symmetrische Matrizen

Es gilt:

$$A = A^T$$

2.7.2 Schiefsymmetrische Matrizen

Es gilt:

$$A = -A^T$$

2.7.3 Orthogonale Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn eine der folgenden äquivalenten Eigenschaften erfüllt ist:

$$A^TA = AA^T = I_n$$

$$A^T = A^{-1}$$

$$||Ax||_2 = ||x||_2$$

$$(Ax, Ay) = (x, y)$$

Eigenschaften orthogonaler Matrizen:

$$det(A) = \pm 1$$

Spalten von A bilden Orthonormalbasis

$$|\lambda| = 1 \quad (Eigenwert)$$

3 Determinanten

3.1 Rechenregeln

$$det(a_{11}) = a_{11}$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Entwicklung nach der j-ten Spalte:

$$det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

Entwicklung nach der i-ten Zeile:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij})$$

Für untere und obere Dreiecksmatrix gilt:

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Weitere Rechenregeln:

$$det \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ \alpha z_i \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} = \alpha det \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_i \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$det \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ a + b \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ a \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ b \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$det(\alpha A) = \alpha^n det(A)$$

Im Allgemeinen gilt:

$$det(A + B) \neq det(A) + det(B)$$

Vertauscht man zwei Zeilen einer Matrix A und erhält B, so gilt:

$$det(B) = -det(A)$$

Multipliziert man eine Zeile einer Matrix A mit einem Faktor α und erhält B, so gilt:

$$det(B) = \alpha det(A)$$

Addiert man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile einer Matrix A und erhält B, so gilt:

$$det(B) = det(A)$$

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

$$det(A^T) = det(A)$$

Falls A invertierbar:

$$det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$$

Für jede invertierbare Matrix C gilt:

$$det(C^{-1}AC) = det(A)$$

3.2 Cramer'sche Regel

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix, dann kann man die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ wie folgt angeben:

$$x_i = \frac{1}{det(A)} det \begin{pmatrix} s_1 & ... & s_{i-1} & b & s_{i+1} & ... & s_n \end{pmatrix}$$

4 Vektorräume

4.1 Bedingungen für einen Vektorraum

Eine nichtleere Menge V, in der man zu je zwei Elementen $a, b \in V$ eine Summe $a+b \in V$ und zu jedem Element $a \in V$ und zu jeder reellen Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ das λ-fache $\lambda a \in V$ bilden kann, heißt Vektorraum, wenn folgende acht Rechengesetze erfüllt sind:

1) Die Addition ist kommutativ:

$$a + b = b + a$$

2) Die Addition ist assoziativ:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

3) Es gibt ein Element $0 \in V$ (Nullelement, Nullvektor) mit

$$a + 0 = a$$

4) Zu jedem Element $a \in V$ gibt es genau ein mit $-a$ bezeichnetes Element in V mit

$$a + (-a) = 0$$

5) Es gilt:

$$1a = a$$

6) Es gilt:

$$\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$$

7) Es gilt:

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

8) Es gilt:

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

4.2 Unterräume

Eine nichtleere Teilmenge $W \subset V$ eines Vektorraums V heißt Unterraum von V, wenn mit je zwei Elementen $x, y \in W$ auch die Summe $x+y$ in W liegt und mit jedem Element x auch das λ-fache λx in W liegt ($\rightarrow$ es muss somit auch gelten: $0 \in W$)

4.3 Kern einer Matrix

Der Kern einer $(m \times n)$-Matrix A ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$

$$Kern(A) = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$$

$Kern(A)$ ist immer ein Untervektorraum von $V = \mathbb{R}^n$

4.4 Lineare Hülle

Ein Unterraum U von V wird von den Vektoren $v_1, v_2, ..., v_k$ erzeugt (aufgespannt), wenn gilt:

$$U = Lin(v_1, v_2, ..., v_k)$$

Dann heißt $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ein Erzeugendensystem von U.

4.5 Lineare Abhängigkeit

Die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_k$ in einem Vektorraum V heißen linear abhängig, wenn es Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, sodass gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k = 0$$

Die Vektoren heißen linear unabhängig, wenn sich nur die triviale Linearkombination bilden lässt.

4.5.1 Eigenschaften

1) Jedes endliche System von Vektoren, das den Nullvektor enthält, ist linear abhängig

2) Jedes endliche System von Vektoren, das ein Teilsystem linear abhängiger Vektoren enthält, ist linear abhängig

3) Jedes Teilsystem eine Systems linear unabhängiger Vektoren ist linear unabhängig

4.6 Basis

Ein System $(v_1, v_2, ..., v_k)$ heißt Basis des Vektorraums V, wenn gilt:

1) Die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_k$ sind linear unabhängig

2) Die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_k$ erzeugen V (lineare Hülle)

4.7 Dimension

Die Länge einer Basis eines endlich erzeugten Vektorraumes $V \neq \{0\}$ nennt man Dimension und bezeichnet man mit $dim(V)$.
Für den Fall $V = \{0\}$ setzt man $dim(V) = 0$.

Dimensionsformel:
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann gilt:

$$Rang(A) + dim(Kern(A)) = n$$

4.8 Zeilen- und Spaltenräume einer Matrix

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$

4.8.1 Spaltenraum

Der Spaltenraum $S_A \subset \mathbb{R}^m$ ist die lineare Hülle der Spaltenvektoren:

$$S_A = Lin(s_1, s_2, ..., s_n)$$

$$S_A = \{Ax | x \in \mathbb{R}^n\}$$

4.8.2 Zeilenraum

Der Zeilenraum ist die lineare Hülle der Zeilenvektoren

$$Z_A = Lin(z_1, z_2, ..., z_m)$$
$$Z_A = \{y^T A | y \in \mathbb{R}^m\}$$

4.8.3 Eigenschaften

$$Rang(A) = Rang(A^T) = dim(S_A) = dim(Z_A)$$

Zeilenräume ändern sich nicht bei elementaren Zeilentransformationen. Analoges gilt für Spaltenräume.

Des Weiteren gilt:

$$Rang(A) \geq Rang(AB) \leq Rang(B)$$

5 Metrik im euklidischen Vektorraum

5.1 Skalarprodukt

Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung, die je zwei Vektoren $x, y \in V$ eine Zahl $(x, y) \in \mathbb{R}$ zuordnet, heißt Skalarprodukt, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Symmetrie
$$(x, y) = (y, x)$$
2. Linearität in jedem Faktor
$$(x, \alpha y + \beta z) = \alpha(x, y) + \beta(x, z)$$
3. Positive Definitheit
$$(x, x) > 0 \; mit \; x \neq 0$$

5.1.1 Skalarprodukt auf Matrizen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn gilt:

$$x^T A x > 0 \; mit \; x \neq 0$$

Skalarprodukt mit symmetrischen und positiv definiten Matrizen:

$$(x, y)_A = x^T A y$$

Positivitätstest:
Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann positiv definit, wenn die Determinanten der n sogenannten Hauptuntermatrizen H_i positiv sind:

$$H_1 = (a_{11})$$
$$H_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

5.2 Norm

$$||x|| = \sqrt{(x, x)}$$

5.2.1 Regeln für Normen

1. Definitheit
$$||x|| \geq 0 \; \forall \; x \in V \; und \; ||x|| = 0 \; falls \; x = 0$$
2. Homogenität
$$||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$$
3. Dreiecksungleichung
$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

5.2.2 l_p-Norm und l_∞-Norm

$$||x||_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$
$$||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

5.2.3 Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Sei $(.,.)$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum V und $||.||$ die von dem Skalarprodukt induzierte Norm. Dann gilt:

$$|(x, y)| \leq ||x|| \cdot ||y||$$

5.3 Winkel

Der Winkel $\Phi = \angle(x, y)$ zwischen zwei Vektoren $x, y \in V$ mit $x \neq 0, y \neq 0$ wird definiert als

$$0 \leq \Phi \leq \pi \; mit \; \cos(\Phi) = \frac{(x, y)}{||x|| \cdot ||y||}$$

5.4 Orthogonale Zerlegung

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen orthogonal $(x \perp y)$, wenn $(x, y) = 0$ gilt.
Ein System von Vektoren $\{v_1, v_2, ...v_k\}$ heißt orthogonal, falls die Vektoren v_i paarweise orthogonal sind.
Sind die Vektoren $\{v_1, v_2, ...v_k\}$ paarweise orthogonal und alle ungleich Null, dann sind sie linear unabhängig.
Ein System von Vektoren heißt Orthogonalbasis eines linearen Raumes V, wenn es eine Basis darstellt und orthogonal ist.
Eine Basis heißt orthonormal, wenn sie orthogonal ist und die Basisvektoren die Länge 1 haben, d.h.

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & falls \; i = j \\ 0 & falls \; i \neq j \end{cases}$$

Sei U ein Unterraum eines euklidischen Vektorraumes V mit $dim(V) = n$. Man definiert den zu U orthogonalen Raum $U^\perp$ durch

$$U^\perp = \{v \in V | (v, u) = 0 \; \forall \; u \in U\}$$

Es gilt:

$$U \cap U^\perp = \{0\}$$
$$dim(U^\perp) = n - dim(U)$$

Sei $x \in V = \mathbb{R}^n$ gegeben. Die orthogonale Zerlegung von x bezüglich eines Unterraumes $U \subset V$ ist eine Darstellung

$$x = x_U + x_{U^\perp}$$

mit

$$x_U \in U \; und \; x_{U^\perp} \in U^\perp$$

Der Vektor x_U ist dann die orthogonale Projektion von x auf U

Sei $v_1 \in U$ und U 1-dimensional. Dann gilt:

$$x = \lambda v_1 + x_{U^\perp}$$

und somit

$$(x, v_1) = \lambda(v_1, v_1) + \underbrace{(x_{U^\perp}, v_1)}_{=0}$$

Sei $v_i \in U$ und eine Orthonormalbasis. Dann gilt:

$$x_U = (x, v_1)v_1 + (x, v_2)v_2 + ... + (x, v_n)v_n$$

5.4.1 Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Sei eine Basis $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eines (Unter-)Vektorraumes W gegeben:

1) Man normiert den ersten Vektor
$$b_1 = \frac{1}{||v_1||} v_1$$
2) Man bestimmt die zu b_1 orthogonale Komponente von v_2
$$z_2 = v_2 - (v_2, b_1) b_1$$
die anschließend normiert wird
$$b_2 = \frac{1}{||z_2||} z_2$$
3) Analog wird dann die zu b_1 und b_2 orthogonale Komponente von v_3 bestimmt
$$z_3 = v_3 - (v_3, b_2) b_2 - (v_3, b_1) b_1$$
und normiert
$$b_3 = \frac{1}{||z_3||} z_3$$
4) usw...

5.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren mit
$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \; und \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$
dann ist das Vektorprodukt $c = a \times b$ gegeben als
$$c = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

5.5.1 Eigenschaften

1) $a \times b$ steht rechtwinklig auf a und b
2) Die Länge des Vektors $a \times b$ ist gleich der Fläche des Parallelogramms mit den Seiten a und b
3) Der Winkel Φ zwischen a und b ist definiert durch
$$\sin(\Phi) = \frac{||a \times b||}{||a|| \cdot ||b||}$$
4) $a \times a = 0$
5) $a \times b = -b \times a$
6) $a \times b = 0$, wenn a und b linear abhängig sind
7) $||a \times b||^2 + |(a, b)|^2 = ||a||^2 + ||b||^2$

5.6 Spatprodukt

Seien die Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Das Spatprodukt dieser Vektoren ist definiert als
$$[a, b, c] = (a \times b, c) = det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

5.6.1 Eigenschaften

1) Der Betrag des Spatprodukts $[a, b, c]$ ist gleich dem Volumen des von a, b und c aufgespannten Spats.
2) Das Spatprodukt ist positiv, wenn a, b und c ein Rechtssystem bilden
3) $[a, b, c] = [b, c, a] = [c, a, b]$ (zyklische Vertauschung)
4) $[a, b, c] = -[a, c, b]$ (allgemeine Vertauschung)
5) $[a, a, b] = 0$

6 Folgen und Reihen

6.1 Folgen

Eine Folge (a_n) konvergiert gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \; oder \; a_n \to a, \; n \to \infty$$
falls es für jede positive Zahl $\epsilon > 0$ einen Index $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt
$$|a_n - a| < \epsilon \; \forall \; n > N_\epsilon$$

6.1.1 Rechenregeln für Folgen und Grenzwerte

Rechenregeln für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) und ihre Grenzwerte a und b:
$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$$
$$\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b} \; falls \; b \neq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a} \; falls \; a_n \geq 0$$
$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$$
$$a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$$

6.1.2 Grenzwertbestimmung und Konvergenzbeweis

Nachweis von Monotonie und Beschränktheit
Eine Folge (a_n) konvergiert gegen eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ falls sie beschränkt und dementsprechend monoton ist.

Sandwich-Theorem
Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit demselben Grenzwert b und erfüllt die Folge (c_n) die Ungleichung
$$a_n \leq c_n \leq b_n \; \forall \; n > N, \; N \in \mathbb{N}$$
so ist die Folge (c_n) ebenfalls konvergent und es gilt
$$\lim_{n\to\infty} c_n = b$$

Cauchy-Konvergenzkriterium
Eine Folge (a_n) ist genau dann konvergent, wenn für alle hinreichend großen Indizes m und n die Abstände $|a_m - a_n|$ beliebig klein werden. Das heißt, wenn es zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ einen Index N_ϵ gibt, sodass gilt:
$$|a_m - a_n| < \epsilon \; \forall \; m, n > N_\epsilon$$

Grenzwert-Berechnung
Ist die Konvergenz bewiesen, erhält man den Grenzwert durch Gleichsetzen von a_{n+1} und a_n.

6.1.3 Wichtige Folgen und Grenzwerte

Geometrische Folge:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & falls\ |q| < 1 \\ 1 & falls\ q = 1 \\ +\infty & falls\ q > 1 \\ divergent & falls\ q \leq -1 \end{cases}$$

Eulersche Zahl:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Andere Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{q^n} = 0\ falls\ q > 1,\ r \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln^k(n)}{n^\epsilon} = 0\ falls\ k \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$$

6.2 Unendliche Reihen

6.2.1 Rechenregeln für Reihen

Für zwei konvergent Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \forall\ c \in \mathbb{R}$$

6.2.2 Grenzwertbestimmung und Konvergenzkriterien

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe, so ist a_n eine Nullfolge.
Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent (aber nicht umgekehrt!).

Leibnizkriterium
Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge (mit $a_n > 0$), dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$$

Majorantenkriterium
Seien (a_n) und (b_n) zwei Folgen, für die die Bedingung

$$|a_n| \leq b_n\ \forall\ n \geq N$$

mit einem Index $N \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

1) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

2) Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Quotientenkriterium
Für die Folge (a_n) betrachtet man die Folge des Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

1) Es gelte

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1\ \forall\ n > N$$

mit einem Index $N \in \mathbb{N}$ und einer Zahl $0 < q < 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

2) Es gelte

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\ \forall\ n > N$$

mit einem Index $N \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Wurzelkriterium
Sei eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gegeben. Existiert der Grenzwert

$$\mu = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

so gilt:

1) Ist $\mu < 1$, so konvergiert die Reihe absolut

2) Ist $\mu > 1$, so divergiert die Reihe

3) Ist $\mu = 1$, so kann man mit dem Wurzelkriterium keine Aussage über die Konvergenz treffen.

6.2.3 Wichtige Reihen und Grenzwerte

Geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}\ falls\ |q| < 1$$

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\ falls\ q \neq 1$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} divergiert & falls\ \alpha \leq 1 \\ konvergiert & falls\ \alpha > 1 \end{cases}$$

Exponentialfunktion

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \alpha^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = e^\alpha$$

α kann hierbei auch komplex sein!

Logarithmus naturalis

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1},\ x \in (-1, 1]$$

Trigonometrische Funktionen

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

7 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

7.1 Funktionsgrenzwerte

Der Grenzwert existiert, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = c$$

Eine reelle Zahl c heiß Grenzwert der Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ für x gegen $a \in I$, wenn es für jede positive reelle Zahl $\epsilon > 0$ eine positive Zahl $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $x \in I, x \neq a$ mit

$$|x - a| < \delta$$

die Funktionswerte in der ϵ-Umgebung von c liegen, d.h.

$$|f(x) - c| < \epsilon$$

7.1.1 *Rechenregeln*

Mit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ folgt:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = c + d$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = cd$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}\ falls\ d \neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\alpha f(x) = \alpha c\ mit\ \alpha \in \mathbb{R}$$

7.1.2 *Konvergenzbeweise*

Vergleichskriterium

Seien $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ drei Funktionen und gelte in der δ-Umgebung von $\alpha \in \mathbb{R}$

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)\ \forall\ x \in (a - \delta, a + \delta), \delta > 0$$

dann folgt aus der Bedingung

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = c$$

die Konvergenz der Funktion f

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

7.1.3 *Wichtige Grenzwerte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$$

Variablentransformation:

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a} - 1}{x - a} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y}$$

7.2 Stetige Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Die Funktion f heißt stetig im Punkt x_0, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Sei $I = [a, b]$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann gelten folgende Aussagen:

1) Die Funktion f ist auf I beschränkt. Das heißt, es gibt eine Konstante C mit

$$|f(x)| \leq C\ \forall\ x \in I$$

2) Die Funktion f nimmt ihr Minimum und ihr Maximum in I an. Das heißt, es gibt Zahlen $x_{min}, x_{max} \in I$ mit

$$m = \min_{x\in I} f(x) = f(x_{min})\ und\ M = \max_{x\in I} f(x) = f(x_{max})$$

3) **Zwischenwertsatz**
Jeder Zwischenwert c mit $m \leq c \leq M$ wird angenommen.
Das heißt, für jedes c mit $m \leq c \leq M$ gibt es ein $\xi \in I$, sodass gilt:

$$c = f(\xi)$$

4) Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so gibt es mindestens eine Nullstelle zwischen a und b

7.2.1 *Bisektionsverfahren*

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a)f(b) < 0$, dann existiert mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$, die folgendermaßen bestimmt werden kann:

1) Setze $a_0 = a$ und $b_0 = b$

2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ berechnet man $c = \frac{a_n+b_n}{2}$.
Ist $f(c_n) = 0$, so hat man eine Nullstelle gefunden. Andernfalls setzt man

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n; b_{n+1} = c_n & falls\ f(a_n)f(c_n) < 0 \\ a_{n+1} = c_n; b_{n+1} = b_n & falls\ f(c_n)f(b_n) < 0 \end{cases}$$

und wiederholt das Ganze bis zur gewünschten Genauigkeit

7.2.2 *Rechenregeln zur Stetigkeit*

Seine f, g zwei stetige Funktionen, dann sind auch folgende Funktionen stetig:

1) $f + g$

2) αf mit $\alpha \in \mathbb{R}$

3) fg

4) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

7.2.3 *Wichtige stetige Funktionen*

1) Konstante Funktionen $f(x) = c$

2) Alle Polynome $p(x)$

3) Exponentialfunkion e^x

4) Eine rationale Funktion zweier Polynome mit $q(x) \neq 0$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

5) $\sin(x)$ und $\cos(x)$

8 Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$

8.1 Folgengrenzwerte in $\mathbb{C}$

$\{z_n\} \subset \mathbb{C}$ konvergiert gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0$$

Man berechnet hierbei die Konvergenzen von $Re(z_n)$ und $Im(z_n)$ und überprüft dann die obige Bedingung.

8.2 Reihen in $\mathbb{C}$

Sei $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ eine (komplexe) Folge. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt absolut konvergent, falls die reelle Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.
Man berechnet also den Betrag der komplexen Folge und bestimmt dann Konvergenz und ggf. den Grenzwert der reellen Reihe.

8.3 Potenzreihen

Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_n und dem Zentrum $z_0 \in \mathbb{C}$ wird Potenzreihe genannt.

Im Falle von höheren Potenzen, wie z.B.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n^2}$$

kann das n^2 einfach substituiert werden (auch in a_n substituieren!), um den Konvergenzradius zu bestimmen (danach keine Resubstitution!)

8.3.1 *Konvergenzradius $(-R, R)$ bestimmen*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Falls diese beiden Grenzwerte nicht existieren:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

9 Differentialrechnung in $\mathbb{R}$

9.1 Rechenregeln

Seien $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar sind, dann gilt:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Produktregel:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Kettenregel:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

9.2 Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f(x)$ ist an der Stelle x_0 differenzierbar, falls folgender Grenzwert existiert:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

9.3 Extremstellen

Notwendige Bedingung

$$f'(x_0) = 0$$

oder Randpunkte von f oder Punkte, an denen f nicht differenzierbar ist.

Hinreichende Bedingung für Minimum:

$$f''(x_0) > 0$$

oder Vorzeichenwechsel von $f'(x_0)$ von "-" nach "+"

Hinreichende Bedingung für Maximum:

$$f''(x_0) < 0$$

oder Vorzeichenwechsel von "+" nach "-"

9.4 Satz von Rolle

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

9.5 Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar. Dann gibt es (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

9.6 Monotonie

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar.
Die Funktion f ist genau dann monoton wachsend, wenn

$$f'(x_0) \geq 0$$

für alle $x \in (a, b)$.
Monoton fallend wird analog definiert.
Strenge Monotonie mit $<$ anstatt $\leq$.

9.7 Krümmungsverhalten

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf dem offenen Intervall (a, b) zweimal stetig differenzierbar.
Die Funktion f ist genau dann konvex (linksgekrümmt), wenn

$$f''(x) \geq 0$$

gilt und genau dann konkav (rechtsgekrümmt), wenn

$$f''(x) \leq 0$$

erfüllt ist für alle $x \in (a, b)$.

9.8 L'Hospital'sche Regel

Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0$$

oder

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = \infty$$

so gilt:

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

9.9 Umkehrfunktion

Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion. Mit Umkehrfunktion wird die Funktion $g : Y \to X$ bezeichnet.

9.9.1 Begriffe für Abbildungen

Bild
Das Bild der Funktion $f : X \to Y$ wird definiert als

$$Bild(f) = f(X) = \{y \in Y | y = f(x), x \in X\}$$

Surjektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt surjektiv, falls das Bild mit der Zielmenge Y übereinstimmt (d.h. wenn jedes Element der Zielmenge Y mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird).

Injektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt injektiv, falls keine zwei verschiedenen Elemente aus X auf dasselbe Element aus Y abgebildet werden.

Bijektivität
Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt bijektiv, falls sie surjektiv und injektiv ist.

9.9.2 Ableitung über die Umkehrfunktion

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Beispiel:

$$f(x) = \arcsin(x)$$
$$g(y) = \sin(y)$$
$$g'(y) = \cos(y)$$
$$f'(y) = \frac{1}{\cos(y)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

9.10 Wichtige Differentiale

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(e^x)' = e^x$$
$$(ln(x))' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin(x))' = \cos(x)$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$
$$(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$(arccot(x))' = -\frac{1}{1 + x^2}$$
$$(a^x)' = \ln(a)a^x$$
$$(x^x)' = x^x(ln(x) + 1)$$
$$(arctanh(x))' = \frac{1}{1 - x^2}$$
$$(arcsinh(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$
$$(arccosh(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

10 Integralrechnung in $\mathbb{R}$

10.1 Rechenregeln

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

Für $f(x) \leq g(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

10.2 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

10.3 Integrationsmethoden

10.3.1 Partielle Integration

Seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gilt:

$$\int u'(x)v(x) = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)$$

10.3.2 Substitution

Sei $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $F : [c, d] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f und $g : [a, b] \to [c, d]$ eine differenzierbare Funktion. Es gilt:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + c$$

Für das bestimmte Integral gilt entsprechend:

$$\int\limits_a^b f(g(x)g'(x)dx = F(g(x))|_a^b = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

10.3.3 Partialbruchzerlegung

Bekannte Spezialfälle:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-a)^{n-1}} \; falls \; n \geq 2$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{b}\arctan\frac{x-a}{b} + c \; falls \; b > 0$$

$$\frac{x-a}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c$$

Ziel ist es, das Integral $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ auf eines dieser vier Integrale zurückzuführen. Dabei geht man wie folgt vor:

1) Ist der Grad des Zählers $p(x)$ größer oder gleich dem Grad des Nenners $q(x)$, so führt man die Polynomdivision durch und erhält die Darstellung

$$f(x) = p_0(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$

wobei der Grad von $p_1(x)$ kleiner ist, als der Grad von $q(x)$.

2) Man sucht alle reellen Nullstellen des Nenners $q(x)$ und zerlegt

$$q(x) = c(x-b_1)^{k_1}(x-b_2)^{k_2}...(x-b_r)^{k_r} \cdot q_1(x)^{l_1}q_2(x)^{l_2}...q_s(x)^{l_s}$$

wobei q_i quadratische Polynome sind, die nicht in Linearfaktoren zerlegt werden können. Sie haben die Gestalt

$$q_i = (x-a_i)^2 + {d_i}^2$$

3) Jetzt stellt man die Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ als Summe von Funktionen der Form

$$\frac{A_1}{x-b}, \frac{A_2}{(x-b)^2}, ..., \frac{A_k}{(x-b)^k}$$

und

$$\frac{B_1x+C_1}{Q(x)}, \frac{B_2x+C_2}{Q(x)^2}, ..., \frac{B_lx+C_l}{Q(x)^l}$$

dar, wobei $b \in \{b_1, b_2, ..., b_r\}, Q \in \{q_1, q_2, ..., q_s\}$ und die Koeffizienten A_i, B_i, C_i zu bestimmen sind.

4) Im letzten Schritt berechnet man die Stammfunktion der einzelnen Summanden (Partialbrüche). Für die Brüche mit $Q(x)^l, l > 1$ verwendet man rekursive Formeln (siehe Formelsammlungen).

10.3.4 Integration von Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ eine durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ definierte Funktion, dann gilt die auf $(-R, R)$ definierte Stammfunktion

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$$

10.4 Uneigentliche Integrale

Integrale, bei denen eine Integrationsgrenze im Unendlichen liegt oder eine Singularität ist.

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int\limits_a^M f(x)dx$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int\limits_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Diese Integrale heißen konvergent, falls der Grenzwert endlich ist.

Vergleichskriterium bei uneigentlichen Integralen:
Seien $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, die auf jedem endlichen Intervall $[a, M]$ integrierbar sind. Es gelte

$$|f(x)| \leq g(x) \; \forall \; x \in [a, \infty)$$

dann folgt aus der Konvergenz des Integrals

$$\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$$

die Konvergenz des Integrals

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$$

Zusammenhang zwischen Konvergenz von Reihen und uneigentlichen Integralen:
Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative, monoton fallende Funktion. Dann ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$$

genau dann konvergent, wenn folgendes uneigentliche Integral konvergent ist:

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

(Die Werte sind im Allgemeinen unterschiedlich!)

Für Unendlich an beiden Integrationsgrenzen:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem abgeschlossenen Intervall $I \in \mathbb{R}$ integrierbar ist. Man definiert dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

falls beide uneigentliche Integrale auf der rechten Seite konvergieren. In diesem Fall hängt das Ergebnis nicht von der Wahl der Zahl $a \in \mathbb{R}$ ab.

Cauchy-Hauptwert:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf dem Intervall $[-M, M]$ für alle $M \in \mathbb{R}, M > 0$ integrierbar ist. Der Cauchy-Hauptwert ist gegeben als

$$CHW \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} f(x)dx$$

falls der Grenzwert existiert.
Falls das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ konvergent ist, existiert auch der Cauchy-Hauptwert, der dann mit dem Wert des uneigentlichen Integrals übereinstimmt (Umkehrung gilt nicht!).

10.5 Laplace-Transformation

Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine auf jedem endlichen Intervall $[0, M]$ integrierbare Funkion, dann heißt

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

Laplace-Transformierte der Funktion f. (Definiert für alle $s \geq 0$, für die das uneigentliche Integral konvergiert.)

Exponentielle Ordnung:
Die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist von exponentieller Ordnung γ (mit $\gamma \in \mathbb{R}$), falls eine Konstante $C \geq 0$ existiert, sodass gilt:

$$|f(t)| \leq Ce^{\gamma t}\ \forall\ t \in [0, \infty)$$

Existenz einer Laplace-Transformierten:
Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion von exponentieller Ordnung γ. Dann existiert die Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$ für alle $s > \gamma$.

Wichtige Laplace-Transformierte:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, s > 0$$

$$f(t) = e^{kt} \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-k}, s > k$$

$$f(t) = \cos(\omega t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}, s > 0$$

$$f(t) = \sin(\omega t) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, s > 0$$

Von Laplace-Transformierter auf $f(x)$ schließen (Bsp.):

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(1 - e^{-t})$$

Rechenregeln:

$$\mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g)$$
$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$
$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - f'(0) - sf(0)$$

10.6 Wichtige Integrale

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$\int \ln(x)dx = -x + x\ln(x) + c$$

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln|x| + c & falls\ \alpha = 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} & falls\ \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & falls\ \alpha < 1 \\ \infty & falls\ \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & falls\ \alpha > 1 \\ \infty & falls\ \alpha < 1 \end{cases}$$

11 Sonstiges

11.1 Sinus- und Kosinus Hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -i\sin(ix)$$

Der Sinus Hyperbolicus ist eine ungerade Funktion.

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos(ix)$$

Der Kosinus Hyperbolicus ist eine gerade Funktion.

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$(\sinh(x))' = \cosh(x)$$

$$(\cosh(x))' = \sinh(x)$$

Diese Formelsammlung ist eine überarbeitete und erweiterte Version der "Formelsammlung Mathematik 1 für Elektroingenieure" von Sebastian Wagner.