Schaltungstechnik 1

Kirchhoff-Gesetze

Anwendbarkeit

Konzentriertheitshypothese muss erfüllt sein:

$d << \lambda = \frac{c}{f}$

d: Größe der Schaltung
λ: Wellenlänge

Knotenregel (KCL)

Für jeden Knoten gilt:
Die Summe aller Ströme ist Null.

$\sum\limits_{Knoten} i_j(t) = 0$

(herausfließende Ströme positiv)

Anzahl linear unabhängiger Knotengleichungen:

$n - 1$

n: Anzahl der Knoten

KCL in Matrixform: $\mathbf{A} \cdot \underline{i} = \underline{0}$

Maschenregel (KVL)

Für jede Masche gilt:
Die Summe der Teilspannungen ist Null.

$\sum\limits_{Umlauf} u_j(t) = 0$

(Spannungen in Umlaufrichtung positiv)

Anzahl linear unabhängiger Schleifengleichungen:

$b - (n - 1)$

b: Anzahl der Zweige
n: Anzahl der Knoten

KVL in Matrixform: $\underline{u} - \mathbf{A}^T \cdot \underline{u_k} = \underline{0} \quad (\mathbf{M} = \mathbf{A}^T)$

Resistive Eintore

Darstellungsformen

Implizit:	$f_F(u, i) = 0$
Explizit:	$u = r(i), i = g(u)$
Parametrisiert:	$u = u(\lambda), i = i(\lambda)$

Eigenschaften

F **ist...**	**Kennlinie von** F**...**
- stromgesteuert	$\exists$ Darstellung $u = r(i)$
- spannungsgesteuert	$\exists$ Darstellung $i = g(u)$
- ungepolt	... ist punktsymmetrisch zu (0/0)
- passiv	... verläuft nur im I. oder III. Quadr.
- aktiv	... ist nicht passiv
- verlustlos	... liegt nur auf den Achsen
- quellenfrei	... geht durch den Ursprung
- streng linear	... ist Ursprungsgerade, Ursprung oder ganze u-i-Ebene
- linear	... ist eine beliebige Gerade
- stückweise linear	... besteht aus Geradenstücken

Umpolung

Punktspiegelung der Kennline am Ursprung
$(u, i) \in F \Leftrightarrow (-u, -i) \in \overline{F}$

Dualität

Für $R_d = 1\Omega$: Spiegelung an der Winkelhalbierenden.
$(u, i) \in F \Leftrightarrow (R_d i, \frac{u}{R_d}) \in F^d$

Widerstände

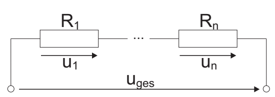
$u = R \cdot i$	$R = \frac{1}{G}$
Reihenschaltung:	$R_{gesamt} = R_1 + ... + R_i$
Parallelschaltung:	$\frac{1}{R_{gesamt}} = \frac{1}{R_1} + ... + \frac{1}{R_i}$
	$R_1 \vert\vert R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Leitwerte

$i = G \cdot u$	$G = \frac{1}{R}$
Reihenschaltung:	$\frac{1}{G_{gesamt}} = \frac{1}{G_1} + ... + \frac{1}{G_i}$
	$G_1 \vert\vert G_2 = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2}$
Parallelschaltung:	$G_{gesamt} = G_1 + ... + G_i$

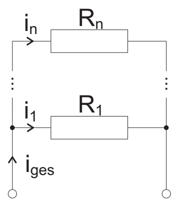
Spannungsteiler / Stromteiler

Spannungsteiler



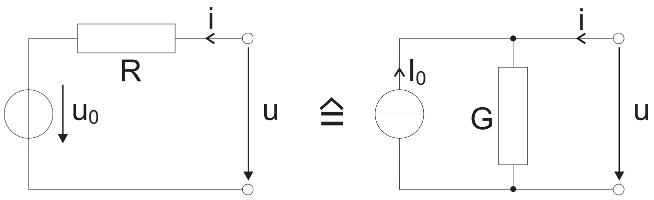
$u_i = u_{ges} \cdot \frac{R_i}{R_{ges}} = u_{ges} \cdot \frac{G_{ges}}{G_i}$

Stromteiler



$i_i = i_{ges} \cdot \frac{R_{ges}}{R_i} = i_{ges} \cdot \frac{G_i}{G_{ges}}$

Quellwandlung linearer Quellen



Für jede lineare Quelle gilt:
$u = R_i \cdot i + U_0$ bzw. $i = G_i \cdot u - I_0$

Kennlinienbestimmung von verschalteten Bauteilen

Parallel

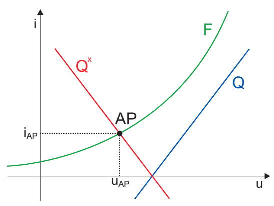
Die Spannung ist an jedem Bauteil gleich. Die Ströme werden nach der Knotenregel addiert.
Grafisch: Kennlinien entlang der i-Achse addieren.

Seriell

Der Strom ist in jedem Bauteil gleich. Die Spannungen werden nach der Maschenregel addiert.
Grafisch: Kennlinien entlang der u-Achse addieren.

Arbeitspunktbestimmung

Q: Quelleneintor
Q^x: Quelleneintor gespiegelt an der u-Achse
F: Lasteintor



Rechnerisch: $i_Q = -i_F$

Graphisch: $AP = F \cap Q^x$

Linearisierung im Arbeitspunkt

z.B. Leitwertsbeschreibung:

$$\Delta i_F = \left.\frac{\partial i_F}{\partial u_F}\right|_{AP} \cdot \Delta u_F$$

$$(i_F = I_{AP} + \Delta i_F; \quad u_F = U_{AP} + \Delta u_F)$$

$$i_{F,lin} = \left.\frac{\partial i_F}{\partial u_F}\right|_{AP} \cdot (u_F - U_{AP}) + I_{AP}$$

$$i_{F,lin} = \underbrace{\left.\frac{\partial i_F}{\partial u_F}\right|_{AP}}_{g} \cdot u_F \underbrace{- \left.\frac{\partial i_F}{\partial u_F}\right|_{AP} \cdot U_{AP} + I_{AP}}_{I_{0,AP}}$$

Ersatzschaltbilder

Zuerst alle Bauteile im Arbeitspunkt linearisieren.

Großsignal

Alle Wechselquellen weglassen.

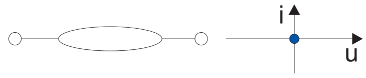
Kleinsignal

Alle Konstantquellen weglassen.

Weglassen bedeutet:
Spannungsquelle durch Kurzschluss, Stromquelle durch Leerlauf ersetzen.

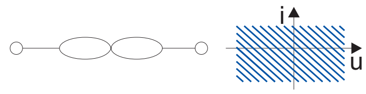
Bauelemente

Nullator



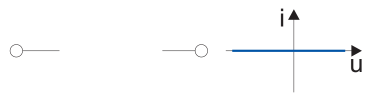
$u = 0$
$i = 0$

Norator



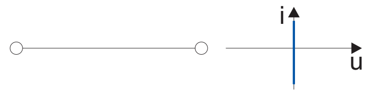
$u =$ beliebig
$i =$ beliebig

Leerlauf



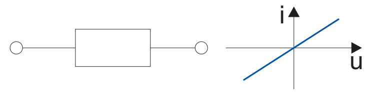
$u =$ beliebig
$i = 0$

Kurzschluss



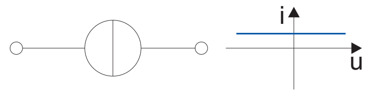
$u = 0$
$i =$ beliebig

Ohmscher Widerstand



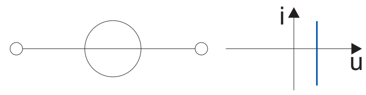
$u = R \cdot i$
$i = G \cdot u$

Ideale Stromquelle



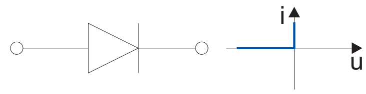
$u =$ beliebig
$i = I_0$

Ideale Spannungsquelle



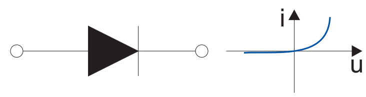
$u = U_0$
$i =$ beliebig

Ideale Diode



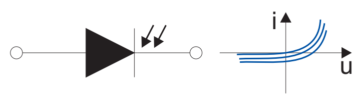
$u = 0$ für $i > 0$
$i = 0$ für $u < 0$

Reale Diode



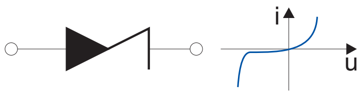
$u = U_T \cdot ln(\frac{i}{I_S} + 1)$
$i = I_S(e^{\frac{u}{U_T}} - 1)$

Photodiode



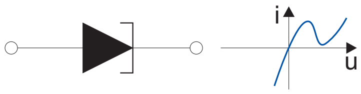
$u(t) = U_T \cdot ln(\frac{i(t)+i_L(t)}{I_S} + 1)$
$i(t) = I_S(e^{\frac{u(t)}{U_T}} - 1) - i_L(t)$

Zenerdiode

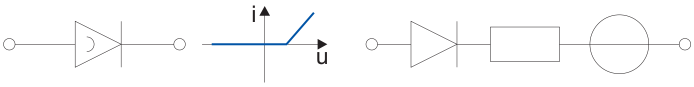


leitet bei $u < U_Z$

Tunneldiode

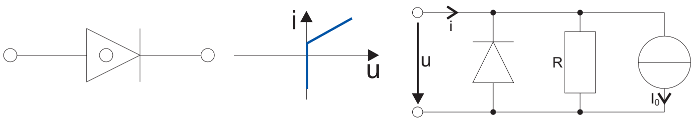


Konkaver Widerstand



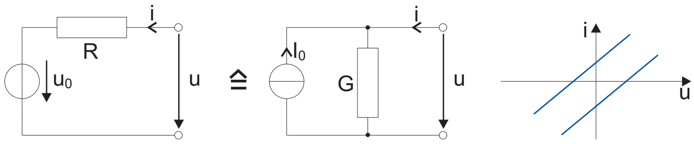
$i = 0$ für $u \leq U_0$
$i = G \cdot (u - U_0)$ für $u \geq U_0$

Konvexer Widerstand



$u = 0$ für $i \leq I_0$
$u = R \cdot (i - I_0)$ für $i \geq I_0$

Lineare Quellen



$U_0 = I_0 \cdot R; \quad I_0 = U_0 \cdot G$

Resistive Zweitore

Darstellungsformen

Implizit

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{N}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix}}_{Kern\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{N}\end{bmatrix}} = \underline{0}$$ quellenfrei

$$F = Kern\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{N}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{u_0}\\ \underline{i_0}\end{bmatrix}$$ nicht quellenfrei

Explizit

$$\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_{11}u_1 + g_{12}u_2\\ g_{21}u_1 + g_{22}u_2\end{bmatrix}$$ Leitwertsbeschr.

$$\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}r_{11}i_1 + r_{12}i_2\\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2\end{bmatrix}$$ Widerstandsbeschr.

$$\begin{bmatrix}u_1\\ i_2\end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \begin{bmatrix}i_1\\ u_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h_{11}i_1 + h_{12}u_2\\ h_{21}i_1 + h_{22}u_2\end{bmatrix}$$ hybride Beschr.

$$\begin{bmatrix}i_1\\ u_2\end{bmatrix} = \mathbf{H'} \cdot \begin{bmatrix}u_1\\ i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h'_{11}u_1 + h'_{12}i_2\\ h'_{21}u_1 + h'_{22}i_2\end{bmatrix}$$ inverse hybride Beschr.

$$\begin{bmatrix}u_1\\ i_1\end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix}u_2\\ -i_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11}u_2 - a_{12}i_2\\ a_{21}u_2 - a_{22}i_2\end{bmatrix}$$ Kettenbeschr.

$$\begin{bmatrix}u_2\\ i_2\end{bmatrix} = \mathbf{A'} \cdot \begin{bmatrix}u_1\\ -i_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a'_{11}u_1 - a'_{12}i_1\\ a'_{21}u_1 - a'_{22}i_1\end{bmatrix}$$ inverse Kettenbeschr.

Parametrisiert

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix} \cdot \underline{c}}_{Bild\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}\underline{u}^{(1)} & \underline{u}^{(2)}\\ \underline{i}^{(1)} & \underline{i}^{(2)}\end{bmatrix} \cdot \underline{c}$$ quellenfrei

$$F = Bild\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\underline{u_0}\\ \underline{i_0}\end{bmatrix}$$ nicht quellenfrei

mit $\frac{1}{V}\underline{u}, \frac{1}{A}\underline{i}, \underline{c} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $\frac{1}{V}\mathbf{U}, \frac{1}{A}\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Eigenschaften

F **ist...**	**wenn...**
- passiv	$\forall \begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} \in F : P = \underline{u}^T \cdot \underline{i} \geq 0$
- aktiv	$\exists \begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} \in F : P = \underline{u}^T \cdot \underline{i} < 0$
- verlustlos	$\forall \begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} \in F : \underline{u}^T \cdot \underline{i} = 0$ $\mathbf{U}^T\mathbf{I} + \mathbf{I}^T\mathbf{U} = \mathbf{0}$ $\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T; \quad \mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$
- umkehrbar	$\mathbf{G} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{P}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A'}$ $\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ „Zeilentausch + Spaltentausch“
- reziprok	$\mathbf{U}^T\mathbf{I} - \mathbf{I}^T\mathbf{U} = \mathbf{0}; \mathbf{G} = \mathbf{G}^T; \mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A'}) = 1$ Netzwerk besteht nur aus R, C und L
Dualität	$\begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}^d = \begin{bmatrix}R_d\mathbf{I}\\ \frac{1}{R_d}\mathbf{U}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & R_d\mathbf{1}\\ \frac{1}{R_d}\mathbf{1} & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}$ $\mathbf{G}^d = \frac{1}{{R_d}^2}\mathbf{R}; \quad \mathbf{R}^d = {R_d}^2\mathbf{G}$

Aufstellen der Matrix

Bei quellenbehafteten Zweitoren:

z.B. $\underline{i} = \mathbf{G} \cdot \underline{u} + \underline{I_0}$

1) Setze Quellen zu Null (Spannungsquelle → KS; Stromquelle → LL) → bestimme Matrix (hier: $\underline{i} = \mathbf{G} \cdot \underline{u}$)

2) Setze Steuergrößen zu Null. → bestimme Quellenvektor (hier: $\underline{i} = \underline{I_0}$).

Kurzschluss/Leerlauf-Methode

Jeweils eine steuernde Größe auf Null setzen (Spannungsquelle → KS; Stromquelle → LL).

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{G} & g_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{u_2=0} & g_{12} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{u_1=0} \\
 & g_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{u_2=0} & g_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{u_1=0} \\
\mathbf{R} & r_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{i_2=0} & r_{12} = \left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{i_1=0} \\
 & r_{21} = \left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{i_2=0} & r_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{i_1=0} \\
\mathbf{H} & h_{11} = \left.\frac{u_1}{i_1}\right|_{u_2=0} & h_{12} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_1=0} \\
 & h_{21} = \left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{u_2=0} & h_{22} = \left.\frac{i_2}{u_2}\right|_{i_1=0} \\
\mathbf{H'} & h'_{11} = \left.\frac{i_1}{u_1}\right|_{i_2=0} & h'_{12} = \left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{u_1=0} \\
 & h'_{21} = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_2=0} & h'_{22} = \left.\frac{u_2}{i_2}\right|_{u_1=0} \\
\mathbf{A} & a_{11} = \left.\frac{u_1}{u_2}\right|_{i_2=0} & a_{12} = -\left.\frac{u_1}{i_2}\right|_{u_2=0} \\
 & a_{21} = \left.\frac{i_1}{u_2}\right|_{i_2=0} & a_{22} = -\left.\frac{i_1}{i_2}\right|_{u_2=0} \\
\mathbf{A'} & a'_{11} = \left.\frac{u_2}{u_1}\right|_{i_1=0} & a'_{12} = -\left.\frac{u_2}{i_1}\right|_{u_1=0} \\
 & a'_{21} = \left.\frac{i_2}{u_1}\right|_{i_1=0} & a'_{22} = -\left.\frac{i_2}{i_1}\right|_{u_1=0}
\end{array}
$$

Linearisierung im AP

Explizit

z.B. Leitwertsbeschreibung:

$\underline{\Delta i} = \mathbf{J} \cdot \underline{\Delta u}$

$(\underline{i} = \underline{I} + \underline{\Delta i}; \quad \underline{u} = \underline{U} + \underline{\Delta u})$

$$
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}\right|_{AP}}_{\mathbf{J}(Jacobimatrix)} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}
$$

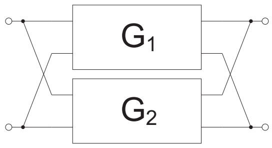
Implizit

$$
\underbrace{\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}\right|_{AP}}_{\mathbf{M}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta u_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_1} & \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_1} & \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \end{bmatrix}\right|_{AP}}_{\mathbf{N}} \cdot \begin{bmatrix} \Delta i_1 \\ \Delta i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}
$$

Zusammenschaltung von Zweitoren

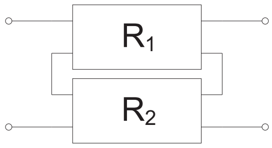
Es muss immer darauf geachtet werden, dass die Torbedingungen eingehalten werden (außer bei Kettenschaltung)!

Parallelschaltung



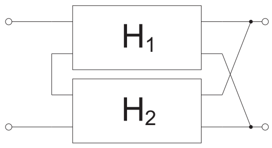
$\mathbf{G}_{ges} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2$

Serienschaltung



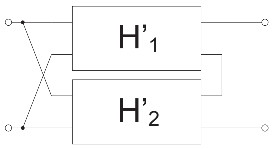
$\mathbf{R}_{ges} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$

Hybride Verschaltung



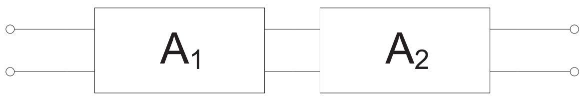
$\mathbf{H}_{ges} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$

Inverse hybride Verschaltung



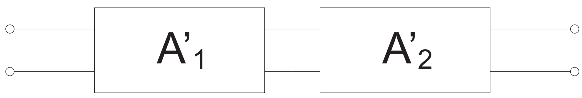
$\mathbf{H'}_{ges} = \mathbf{H'}_1 + \mathbf{H'}_2$

Kettenschaltung



$\mathbf{A}_{ges} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2$

Inverse Kettenschaltung



$\mathbf{A'}_{ges} = \mathbf{A'}_2 \cdot \mathbf{A'}_1$

Umrechnung der Zweitor-Matrizen

Implizit → explizit

$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad |M^{-1}\cdot$

$\underline{u} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{N} \cdot \underline{i} = \underline{0}$

$\underline{u} = \underbrace{-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}}_{\mathbf{R}} \cdot \underline{i}$

$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \underline{0} \quad |N^{-1}\cdot$

$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M} \cdot \underline{u} + \underline{i} = \underline{0}$

$\underline{i} = \underbrace{-\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}}_{\mathbf{G}} \cdot \underline{u}$

Explizit → implizit

$\underline{u} = \mathbf{R} \cdot \underline{i}$

$\underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{M}} \cdot \underline{u} \underbrace{-\mathbf{R}}_{\mathbf{N}} \cdot \underline{i} = \underline{0}$

$\underline{i} = \mathbf{G} \cdot \underline{u}$

$\underbrace{-\mathbf{G}}_{\mathbf{M}} \cdot \underline{u} + \underbrace{\mathbf{1}}_{\mathbf{N}} \cdot \underline{i} = \underline{0}$

Parametrisiert → explizit

$$\begin{bmatrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\cdot\underline{c} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}\underline{u}\\ \underline{i}\end{matrix} = \begin{matrix}\mathbf{U}\cdot\underline{c}\\ \mathbf{I}\cdot\underline{c}\end{matrix}$$

$\underline{i} = \mathbf{I}\cdot\underline{c} \quad |\mathbf{I}^{-1}\cdot$ $\qquad$ $\underline{u} = \mathbf{U}\cdot\underline{c} \quad |\mathbf{U}^{-1}\cdot$

$\Rightarrow \mathbf{I}^{-1}\cdot\underline{i} = \underline{c}$ $\qquad$ $\Rightarrow \mathbf{U}^{-1}\cdot\underline{u} = \underline{c}$

$\Rightarrow \underline{u} = \underbrace{\mathbf{U}\cdot\mathbf{I}^{-1}}_{R}\cdot\underline{i}$ $\qquad$ $\Rightarrow \underline{i} = \underbrace{\mathbf{I}\cdot\mathbf{U}^{-1}}_{G}\cdot\underline{u}$

Explizit → parametrisiert

$\underline{u} = \mathbf{R}\cdot\underline{i}$ $\qquad$ $\underline{i} = \mathbf{G}\cdot\underline{u}$

$\mathbf{U} = \mathbf{R}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{1}$ $\qquad$ $\mathbf{U} = \mathbf{1}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{G}$

Implizit → parametrisiert

$\mathbf{U} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}; \quad \mathbf{I} = \mathbf{1}$ oder $\mathbf{U} = \mathbf{1}; \quad \mathbf{I} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{M}$

Parametrisiert → implizit

$\mathbf{M} = -\mathbf{I}\cdot\mathbf{U}^{-1}; \quad \mathbf{N} = \mathbf{1}$ oder $\mathbf{M} = \mathbf{1}; \quad \mathbf{N} = -\mathbf{U}\cdot\mathbf{I}^{-1}$

Explizit → explizit

$\underline{i} = \mathbf{G}\cdot\underline{u} + \underline{I}_0 \quad |\mathbf{R}\cdot$ $\qquad$ $\underline{u} = \mathbf{R}\cdot\underline{i} + \underline{U}_0 \quad |\mathbf{G}\cdot$

$\mathbf{R}\cdot\underline{i} = \underbrace{\mathbf{R}\cdot\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}\cdot\underline{u} + \mathbf{R}\cdot\underline{I}_0$ $\qquad$ $\mathbf{G}\cdot\underline{u} = \underbrace{\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}}_{\mathbf{1}}\cdot\underline{i} + \mathbf{G}\cdot\underline{U}_0$

$\underline{u} = \mathbf{R}\cdot\underline{i} - \mathbf{R}\cdot\underline{I}_0$ $\qquad$ $\underline{i} = \mathbf{G}\cdot\underline{u} - \mathbf{G}\cdot\underline{U}_0$

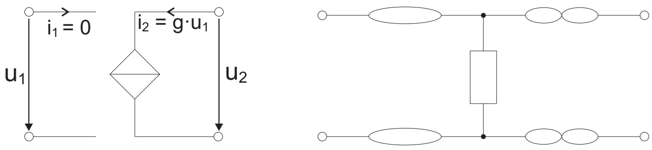
	R	**G**	**H**
R	$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{det(\mathbf{G})}\begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12}\\ -g_{21} & g_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{22}}\begin{bmatrix} det(\mathbf{H}) & h_{12}\\ -h_{21} & 1\end{bmatrix}$
G	$\frac{1}{det(\mathbf{R})}\begin{bmatrix} r_{22} & -r_{12}\\ -r_{21} & r_{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h_{12}\\ h_{21} & det(\mathbf{H})\end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{r_{22}}\begin{bmatrix} det(\mathbf{R}) & r_{12}\\ -r_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -g_{12}\\ g_{21} & det(\mathbf{G})\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12}\\ h_{21} & h_{22}\end{bmatrix}$
H'	$\frac{1}{r_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -r_{12}\\ r_{21} & det(\mathbf{R})\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{22}}\begin{bmatrix} det(\mathbf{G}) & g_{12}\\ -g_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{det(\mathbf{H})}\begin{bmatrix} h_{22} & -h_{12}\\ -h_{21} & h_{11}\end{bmatrix}$
A	$\frac{1}{r_{21}}\begin{bmatrix} r_{11} & det(\mathbf{R})\\ 1 & r_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{21}}\begin{bmatrix} -g_{22} & -1\\ -det(\mathbf{G}) & -g_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{21}}\begin{bmatrix} -det(\mathbf{H}) & -h_{11}\\ -h_{22} & -1\end{bmatrix}$
A'	$\frac{1}{r_{12}}\begin{bmatrix} r_{22} & det(\mathbf{R})\\ 1 & r_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{g_{12}}\begin{bmatrix} -g_{11} & -1\\ -det(\mathbf{G}) & -g_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{12}}\begin{bmatrix} 1 & h_{11}\\ h_{22} & det(\mathbf{H})\end{bmatrix}$

	H'	**A**	**A'**
R	$\frac{1}{h'_{11}}\begin{bmatrix} 1 & -h'_{12}\\ h'_{21} & det(\mathbf{H}')\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{21}}\begin{bmatrix} a_{11} & det(\mathbf{A})\\ 1 & a_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{21}}\begin{bmatrix} a'_{22} & 1\\ det(\mathbf{A'}) & a'_{11}\end{bmatrix}$
G	$\frac{1}{h'_{22}}\begin{bmatrix} det(\mathbf{H}') & h'_{12}\\ -h'_{21} & 1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{12}}\begin{bmatrix} a_{22} & -det(\mathbf{A})\\ -1 & a_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{12}}\begin{bmatrix} a'_{11} & -1\\ -det(\mathbf{A}') & a'_{22}\end{bmatrix}$
H	$\frac{1}{det(\mathbf{H}')}\begin{bmatrix} h'_{22} & -h'_{12}\\ -h'_{21} & h'_{11}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{22}}\begin{bmatrix} a_{12} & det(\mathbf{A})\\ -1 & a_{21}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{11}}\begin{bmatrix} a'_{12} & 1\\ -det(\mathbf{A}') & a'_{21}\end{bmatrix}$
H'	$\begin{bmatrix} h'_{11} & h'_{12}\\ h'_{21} & h'_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a_{11}}\begin{bmatrix} a_{21} & -det(\mathbf{A})\\ 1 & a_{12}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{a'_{22}}\begin{bmatrix} a'_{21} & -1\\ det(\mathbf{A}') & a'_{12}\end{bmatrix}$
A	$\frac{1}{h'_{21}}\begin{bmatrix} 1 & h'_{22}\\ h'_{11} & det(\mathbf{H}')\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$	$\frac{1}{det(\mathbf{A}')}\begin{bmatrix} a'_{22} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{11}\end{bmatrix}$
A'	$\frac{1}{h'_{12}}\begin{bmatrix} -det(\mathbf{H}') & -h'_{22}\\ -h'_{11} & -1\end{bmatrix}$	$\frac{1}{det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} a_{22} & a_{12}\\ a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12}\\ a'_{21} & a'_{22}\end{bmatrix}$

Spezielle Zweitore

USI

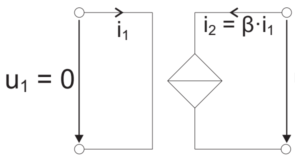
Spannungsgesteuerte Stromquelle (VCCS)



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{g}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ g & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ -g & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ISI

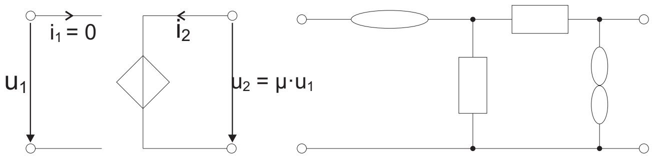
Stromgesteuerte Stromquelle (CCCS)



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{\beta}\end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \beta & 0\end{bmatrix}$$

USU

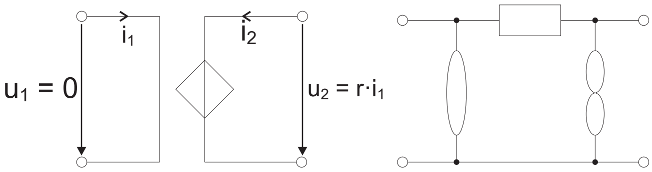
Spannungsgesteuerte Spannungsquelle (VCVS)



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{H'} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \mu & 0\end{bmatrix}$$

ISU

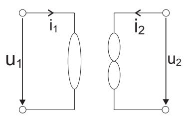
Stromgesteuerte Spannungsquelle (CCVS)



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ \frac{1}{r} & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ r & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ -r & 0\end{bmatrix}$$

Nullor

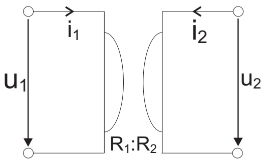
Quellenfrei, streng linear



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Gyrator

Dualwandler, Positiv-Immittanz-Inverter (PII)



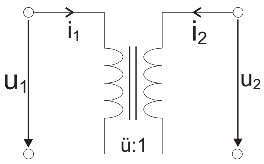
Verlustlos ($R_1 = R_2 = R_d$)
$\mathbf{G} = -\mathbf{G}^T$
$\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T$
$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}') = -1$
$F_{Gyr} = F^d$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -R_1 \\ R_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A'} = \begin{bmatrix} 0 & -R_2 \\ -\frac{1}{R_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & R_1 \\ -R_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Idealer Übertrager

Positiv-Immittanz-Konverter (PIK)



Verlustlos
Reziprok
Umkehrbar für ü $= \pm 1$
$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}') = 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \\ 0 & \ddot{u} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H'} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\ddot{u}} \\ \frac{1}{\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\ddot{u} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \ddot{u} & 1 \end{bmatrix}$$

NIK

Negativ-Immittanz-Konverter (NIK)

Aktiv, antireziprok, für $|k| = 1$ symmetrisch

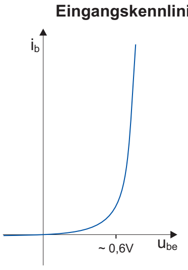
$k = 1$ F ist an der i_1-Achse gespiegelter Zweipol
$k = -1$ F ist an der u_1-Achse gespiegelter Zweipol

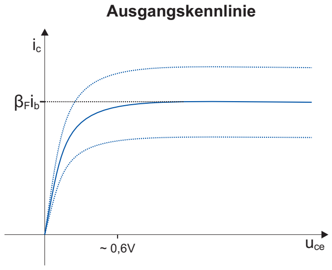
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A'} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k} & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -k \\ -k & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H'} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ -\frac{1}{k} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{k} \end{bmatrix}$$

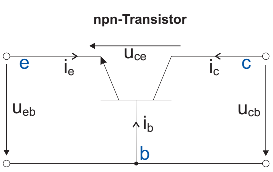
Bipolar-Transistoren

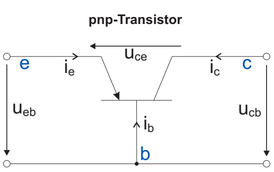
Kennlinien eines npn-Transistors



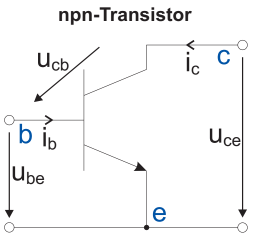


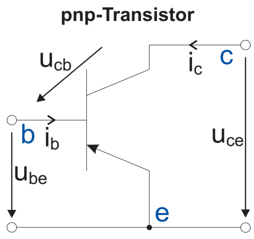
Basisschaltung



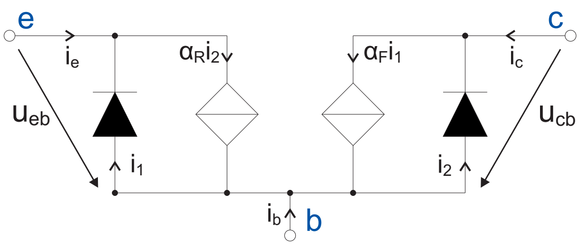


Emitterschaltung





Ebers-Moll-Modell (Basisschaltung, npn)



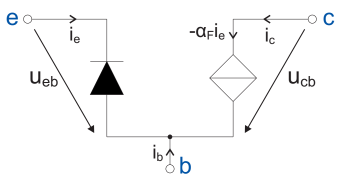
$$i_e = -I_{es} \cdot (e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1) + \alpha_R I_{cs} \cdot (e^{-\frac{u_{cb}}{U_T}} - 1)$$

$$i_c = \alpha_F I_{es} \cdot (e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1) - I_{cs} \cdot (e^{-\frac{u_{cb}}{U_T}} - 1)$$

Vereinfachung für Vorwärtsbetrieb (npn)

Bedingung für den Vorwärtsbetrieb: $u_{be} > 0 \wedge u_{cb} \geq 0$

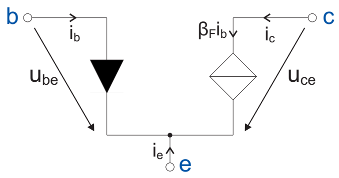
Basisschaltung



$$i_e = -I_{es} \cdot (e^{-\frac{u_{eb}}{U_T}} - 1)$$

$$i_c = -\alpha_F i_e$$

Emitterschaltung



$$i_b = \overbrace{\underbrace{(1-\alpha_F)}_{\approx \frac{1}{\beta_F}} \cdot I_{es}}^{\approx I_S} \cdot (e^{\frac{u_{be}}{U_T}} - 1)$$

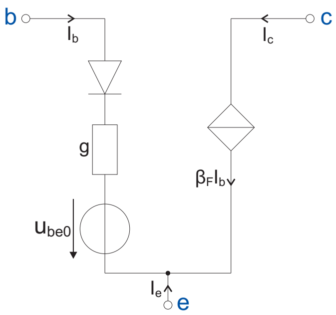
$$i_c = \beta_F i_b$$

$$i_c = \overbrace{\underbrace{\alpha_F}_{\approx 1} \cdot I_{es}}^{\approx \beta_F \cdot I_S} \cdot (e^{\frac{u_{be}}{U_T}} - 1)$$

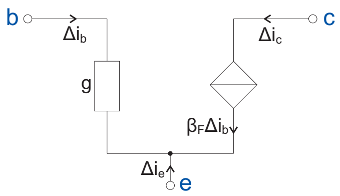
Linearisierung

(Emitterschaltung, Vorwärtsbetrieb, npn)

Großsignal-ESB:



Kleinsignal-ESB:



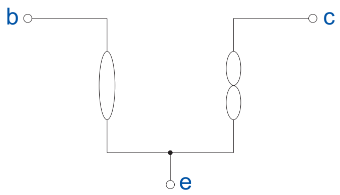
$\beta_F = \frac{i_c}{i_b} = \frac{\alpha_F}{1-\alpha_F}$

$\alpha_F = \frac{\beta_F}{1+\beta_F}$

$g = \frac{\partial i_b}{\partial u_{be}}\Big|_{AP} \approx -\frac{I_e}{\beta_F \cdot U_T}$

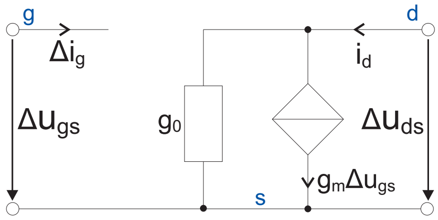
$g \approx \frac{I_b}{U_T} = \frac{I_c}{\beta_F \cdot U_T}$

Wenn $\beta_F \to \infty$:



Kleinsignal-Ersatzschaltbilder (nMOS)

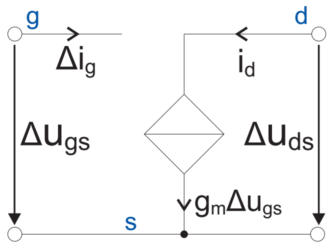
Linearer Bereich



$g_m = \frac{\partial i_d}{\partial u_{gs}}\Big|_{AP} = \beta \cdot U_{ds}$

$g_0 = \frac{\partial i_d}{\partial u_{ds}}\Big|_{AP} = \beta \cdot (U_{gs} - U_T - U_{ds})$

Sättigungsbereich



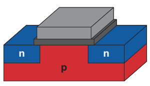
$g_m = \frac{\partial i_d}{\partial u_{gs}}\Big|_{AP}$

$g_m = \beta \cdot (U_{gs} - U_T)$

Feldeffekt-Transistoren (FET)

nMOS

Guter Pull-Down
Source am niedrigeren Potential ($u_{DS} > 0$)



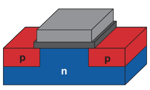
$$i_D = \begin{cases} 0 & u_{GS} < U_t(aus) \\ & \wedge\ u_{DS} \geq 0 \\ \beta\left(u_{GS} - U_t - \frac{u_{DS}}{2}\right) u_{DS} & u_{GS} > U_t \text{ (linear)} \\ & \wedge\ 0 < u_{DS} < u_{GS} - U_t \\ \frac{\beta}{2}\left(u_{GS} - U_t\right)^2 & u_{GS} > U_t \text{ (Sättigung)} \\ & \wedge\ 0 < u_{GS} - U_t < u_{DS} \end{cases}$$

Enhancement-Typ (selbssperrend): $U_t \approx 1V$
Depletion-Typ (selbstleitend): $U_t \approx -1V$

Kanallängenmodulation: $i'_D = i_D \cdot (1 + \lambda \cdot u_{DS})$

pMOS

Guter Pull-Up
Source am höheren Potential ($u_{DS} < 0$)

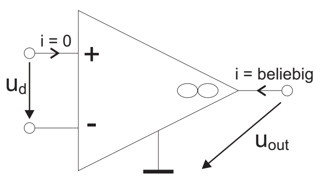


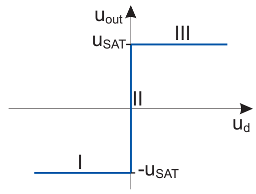
$$i_D = \begin{cases} 0 & u_{GS} > U_t(aus) \\ & \wedge\ u_{DS} \leq 0 \\ -\beta\left(u_{GS} - U_t - \frac{u_{DS}}{2}\right) u_{DS} & u_{GS} < U_t \text{ (linear)} \\ & \wedge\ 0 > u_{DS} > u_{GS} - U_t \\ \frac{-\beta}{2}\left(u_{GS} - U_t\right)^2 & u_{GS} < U_t \text{ (Sättigung)} \\ & \wedge\ 0 > u_{GS} - U_t > u_{DS} \end{cases}$$

Enhancement-Typ (selbstsperrend): $U_t \approx -1V$

Kanallängenmodulation: $i'_D = i_D \cdot (1 - \lambda \cdot u_{DS})$

Operationsverstärker

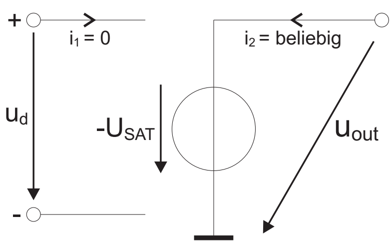




Operationsverstärker müssen immer über ihren invertierenden Eingang rückgekoppelt werden, da sich sonst eine Z-Kennlinie ergibt und der Arbeitspunkt somit nicht mehr eindeutig ist.

Ersatzschaltbilder

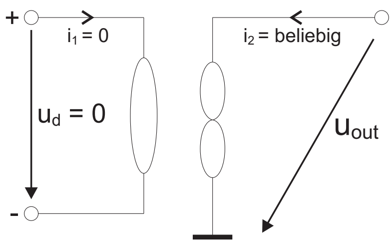
ESB I



$u_d < 0$

$u_{out} = -U_{SAT}$

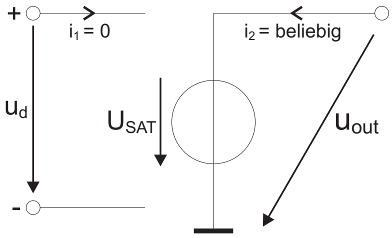
ESB II



$u_d = 0$

$|u_{out}| \leq |U_{SAT}|$

ESB III

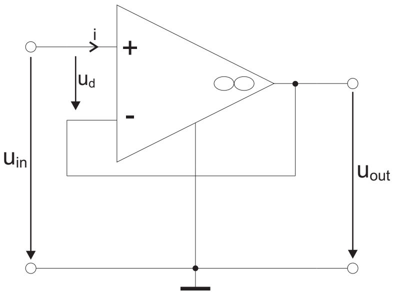


$u_d > 0$

$u_{out} = U_{SAT}$

OP-Schaltungen

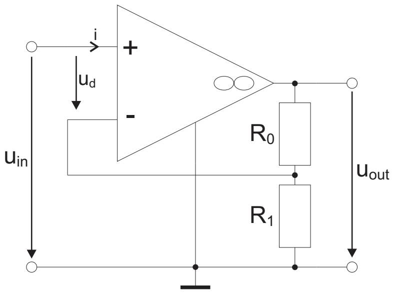
Spannungsfolger (Impedanzwandler)



$u_{out} = u_{in}$

$v_u = 1$

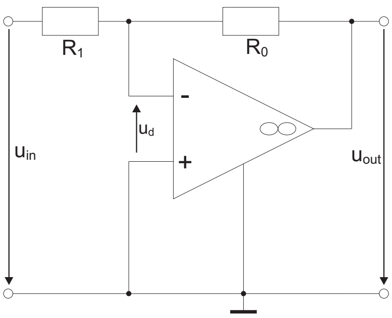
Nichtinvertierender Verstärker



$u_{out} = (1 + \frac{R_0}{R_1}) \cdot u_{in}$

$v_u = 1 + \frac{R_0}{R_1}$

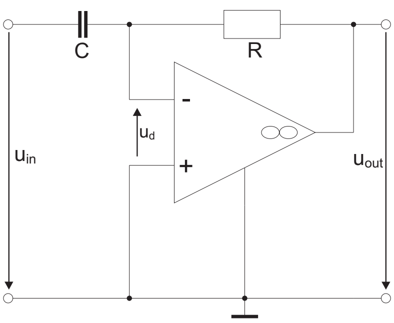
Invertierender Verstärker



$u_{out} = -\frac{R_0}{R_1} \cdot u_{in}$

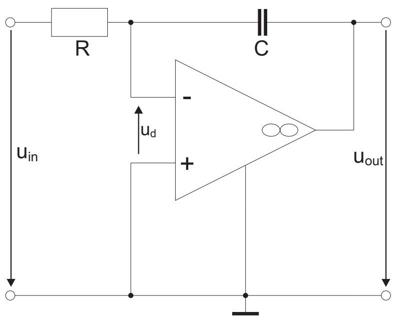
$v_u = \frac{R_0}{R_1}$

Differenzierer



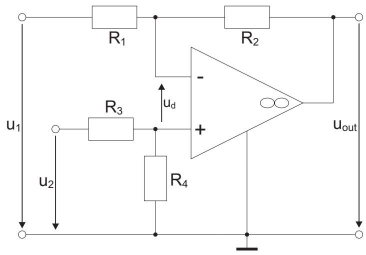
$u_{out} = -RC \cdot \dot{u}_{in}$

Integrierer



$u_{out} = -u_c(t_0) - \frac{1}{RC} \cdot \int_{t_0}^{t_1} u_{in} dt$

Differenzverstärker/Subtrahierer

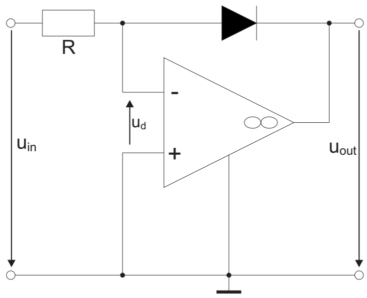


Bedingung:
$R_1 = R_3; \quad R_2 = R_4$

$u_{out} = \frac{R_2}{R_1} \cdot (u_2 - u_1)$

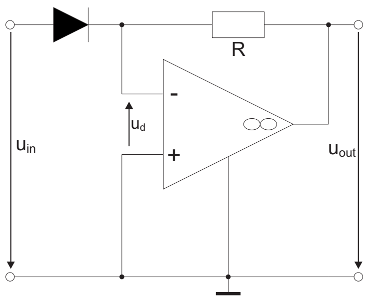
$u_{out} = \frac{R_4}{R_3} \cdot (u_2 - u_1)$

Logarithmierer



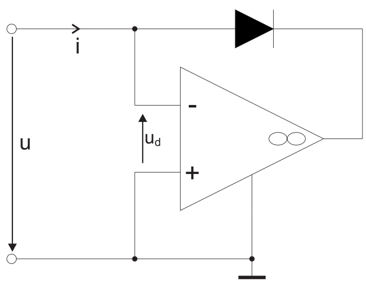
$u_{out} = -U_T \cdot ln(\frac{u_{in}}{R \cdot I_S})$

Exponentierer

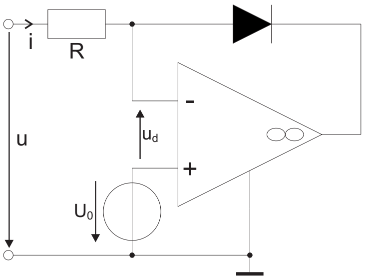


$u_{out} = -R \cdot I_S \cdot e^{\frac{u_{in}}{U_T}}$

Ideale Diode

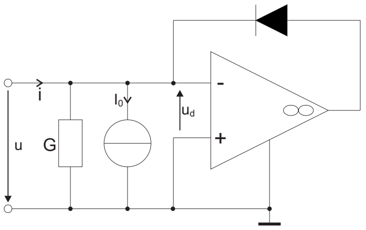


Konkaver Widerstand



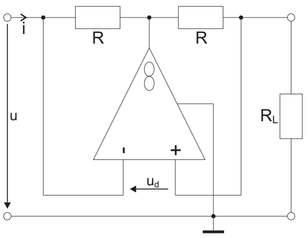
$U_0 < U_{SAT}$

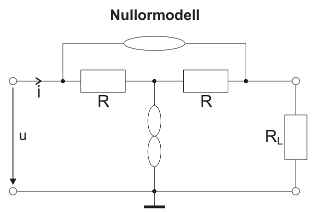
Konvexer Widerstand

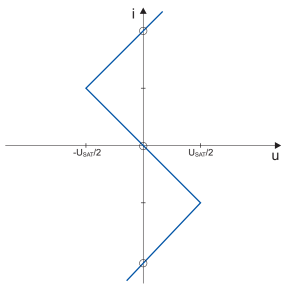


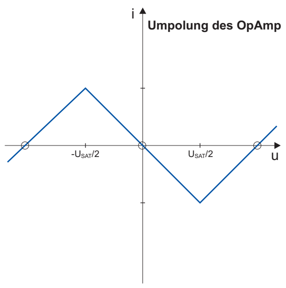
$I_0 < G \cdot U_{SAT}$

NIK









USU

$\mu \geq 1$	Nichtinvertierender Verstärker
$\mu < 0$	Spannungsfolger und invertierender Verstärker hintereinander
$0 < \mu < 1$	Spannungsfolger und zwei invertierende Verstärker hintereinander

ISU

$r < 0$	Invertierender Verstärker mit $R_1 = 0\Omega$
$r > 0$	Zusätzlich invertierenden Verstärker mit $v_u = -1$ nachschalten

Gyrator

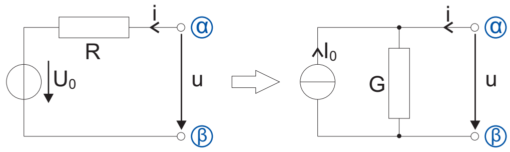
- Parallelschaltung zweier USI
- Serienschaltung zweier ISU
- Kettenschaltung eines NIK ($k = -1$) mit einem NII

Knotenspannungsanalyse (KSA)

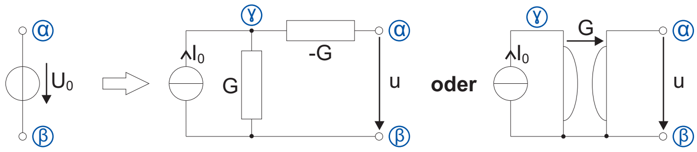
$\mathbf{Y}_k \cdot \underline{u}_k = \underline{i}_q$

1. Nichtspannungsgesteuerte Elemente ersetzen

Ideale Spannungsquelle

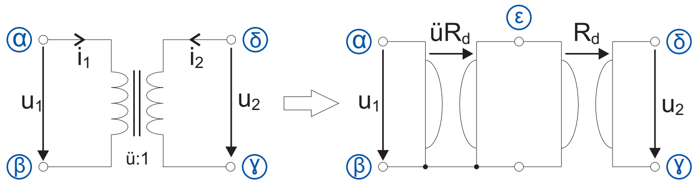


$I_0 = \frac{U_0}{R}$

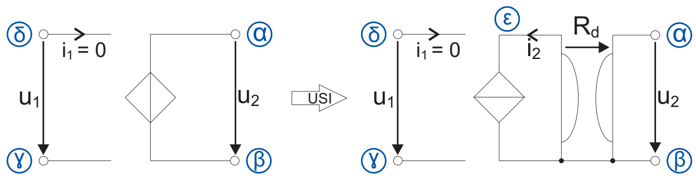


$I_0 = G \cdot U_0$

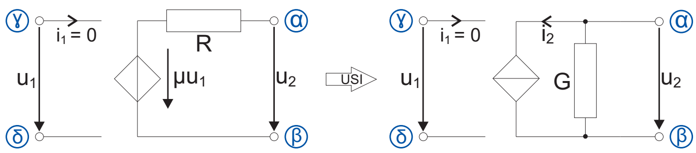
Idealer Übertrager



USU

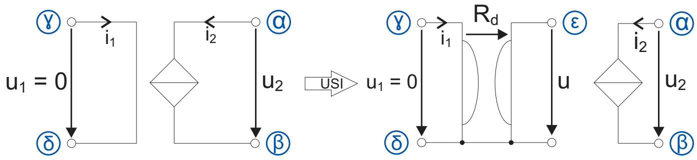


$u_2 = \mu \cdot u_1 \qquad i_2 = -\frac{\mu \cdot u_1}{R_D}$



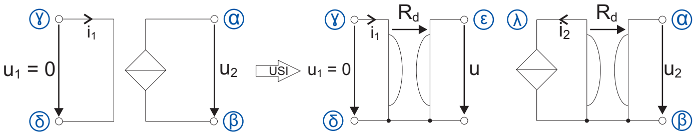
$i_2 = -G \cdot \mu \cdot u_1$

ISI



$i_2 = \beta \cdot i_1 \qquad u = R_d \cdot i_1 \qquad i_2 = \frac{\beta \cdot u}{R_d}$

ISU



$u_2 = \beta \cdot i_1 \quad u = R_d \cdot i_1 \quad i_2 = \frac{u}{R_d} \quad u_2 = -R_d \cdot i_1$

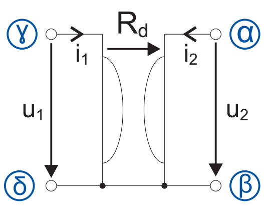
2. Knotenspannungsvektor U_k aufstellen

3. Knotenleitwertsmatrix Y_k aufstellen

Leitwert

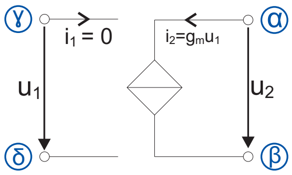
$$\mathbf{Y}_k = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \alpha & \beta & \end{array} \\ \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & G & -G & \dots \\ \dots & -G & G & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \end{array}$$

Gyrator



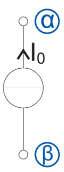
$$\mathbf{Y}_k = \begin{array}{c|cccc} & \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \hline \gamma & & & G & -G \\ \delta & & & -G & G \\ \alpha & -G & G & & \\ \beta & G & -G & & \end{array}$$

USI



$$\mathbf{Y}_k = \begin{array}{c|cccc} & & \gamma & \delta & \\ \hline & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \dots & g_m & -g_m & \dots \\ \beta & \dots & -g_m & g_m & \dots \\ & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

4. Quellvektor I_q aufstellen



$$\mathbf{Y}_k = \begin{array}{c} \\ \alpha \\ \beta \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ i_q \\ -i_q \\ \dots \end{bmatrix}$$

5. Reduzierte Knotenleitwertsmatrix Y_k

Nullator

In $\mathbf{Y}_k$ die entsprechenden Spalten addieren und eine davon streichen **UND** entsprechenden Eintrag im $\underline{u}_k$-Vektor streichen.
Falls mit Masse verbunden: Spalte streichen.

Norator

In $\mathbf{Y}_k$ die entsprechenden Zeilen addieren und eine davon streichen **UND** entsprechenden Eintrag im $\underline{i}_q$-Vektor streichen.
Falls mit Masse verbunden: Zeile streichen.

Sonstiges

Tellegenscher Satz

Der Spannungsvektor steht immer senkrecht zum Stromvektor ($\mathbf{AB}^T = \mathbf{0}$ bzw. $\mathbf{BA}^T = \mathbf{0}$).

Tableau-Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{M} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{u} \\ \underline{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{e} \end{bmatrix}$$